

Prostorno mišljenje i geometrija prostora

Nikolina Kovačević, Zagreb

Familija pet polovina kugala

Davne 1964. godine za otvaranje novog matematičkog odjela jedne visoke škole u Ulmu izrađena je zanimljiva umjetnička skulptura sastavljena od pet sukladnih kugala. Svaki od pet nastalih različitih modela ima isti obujam, pola obujma kugle. Njihov dizajner, Max Bill, objasnio je značenje svojih modela: "Realni dio kugle simbolizira obično korištenu matematiku. Komplementarna, imaginarna polovica, koju možemo predložiti u mislima, predstavlja dio koji sadrži još nerazvijena područja matematike."



Uvod

Posljednjih godina sve se više raspravlja o usmjeravanju nastave prema konačnim rezultatima, potrebnim kompetencijama. Tekst koji slijedi poslužit će kao okvir za razmatranje razvoja geometrijskog mišljenja kroz prostorno mišljenje i prostorni zor, tražene kvalitete u današnjem svijetu ICT tehnologije.

Cilj nam je istaknuti nužnost jačeg razvijanja prostornog razmišljanja kroz produbljivanje geometrijskih znanja na svim obrazovnim razinama ovisno o interesima pojedinaca s jedne strane i specifičnim zahtjevima različitih struka s druge strane. Na početku ćemo istaknuti neke od problema razvijanja prostornog mišljenja i prostornog zora unutar geometrijskih sadržaja kroz obrazovnu vertikalu: od primarnog do tercijarnog obrazovanja. Zatim ćemo se osvrnuti na korištenje računala u njihovu razvijanju.

Nikolina Kovačević, prof. matematike, Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Zavod za matematiku, informatiku i nacrtanu geometriju, Zagreb, nkovacev@rgn.hr

Prostorno mišljenje i prostorni zor

Pod *prostornim zorom* podrazumijevamo sposobnost vizualizacije prostora, tj. pamćenja oblika, veličina geometrijskih figura (predmeta), kao i uočavanje svih međusobnih položaja i odnosa. S druge strane, *prostorno mišljenje* je sastavni dio matematičke kompetencije, jedne od 8 ključnih kompetencija, koja uključuje *na različitim stupnjevima, sposobnost i volju za korištenjem matematičkih načina razmišljanja (logičko i prostorno mišljenje) i prikazivanja (formule, modeli, konstrukcije, grafovi, grafikoni)*, (NOK 2011.; Čižmešija, Svedrec, Radović, Soucie 2011.).

I prostorno mišljenje i prostorni zor usko su povezani uz geometriju, specijalno geometriju prostora, čiju važnost, u općeobrazovnom procesu možemo promatrati s različitih stajališta (prijedlog – Okvir nacionalnog kurikulumu 2016.; Kovačević i Jurkin 2013.; NOK 2011.; Čižmešija i sur. 2010.; Nastavni plan i program 2006.; Radović, Svedrec, Soucie, Kokić 2011.);

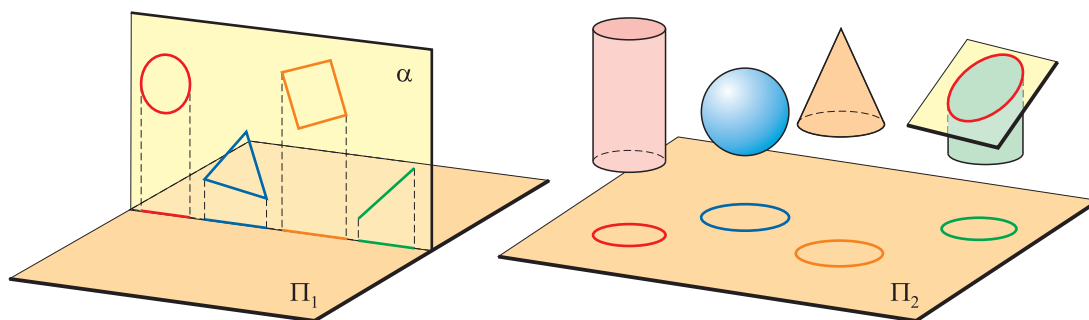
- Osnovni geometrijski principi mišljenja temelj su bezvremenskih, nepromjenljivih, i u brojnim područjima primjenjivih, načina razmišljanja i imaju stoga karakter generičkih kompetencija.
- Geometrija kao sredstvo za jednoznačno opisanje prostornih situacija je prikladan instrument za analiziranje i rješavanje prostornih problema nudeći crtež kao univerzalno sredstvo za komunikaciju na stručnoj, ali i laičkoj razini.

- Pod utjecajem globalizacijskih procesa i brzog znanstvenog i tehnološkog razvoja, javljaju se novi alati koji zahtijevaju visok stupanj razvijenosti prostorne vizualizacije neophodne za rad s virtualnim objektima.

Nacrtna geometrija

Jedno od područja općeobrazovnog karaktera, u kojem se treniraju osobito one sposobnosti i vještine koje imaju za cilj razvoj prostornog razmišljanja i prostorne inteligencije, je nacrtana (deskriptivna) geometrija (njem. *Darstellende geometrie*) (Kovačević i Jurkin 2013.; Radović i sur. 2011.). Općenito govoreći, nacrtana geometrija je usmjerena na usvajanje temeljnih znanja, vještina i procesa, te uspostavljanje i razumijevanje geometrijskih odnosa i veza primjenom konstruktivnih metoda. U njoj se, uz tzv. kvalitativna svojstva geometrijskih oblika, određivanje njihova položaja u ravnini i prostoru, te korištenje različitih koordinatnih sustava, geometrijski oblici i njihov međusobni odnos sagledavaju i kombiniranjem različitih prikaza, projekcija.

Različitim vrstama projiciranja (npr. perspektiva, ortogonalna projekcija, kosa projekcija, stereografska projekcija. . .) prostornih objekata određuju se njihovi ravninski prikazi. Dobivene (ravninske) projekcije često omogućuju zornije prikaze 3D objekata olakšavajući analizu i aktivno pristupanje različitim stereometrijskim problemima, ali projekcijski prikazi ne umanjuju složenost prostornih odnosa i objekata. Primjerice, na donjoj slici prikazane



su dužine u ravnini projekcije Π_1 nastale ortogonalnim (okomitim) projiciranjem različitih ravninskih objekata smještenih u prostoru u vertikalnoj ravnini α . Slično, kružnice/krugovi u ravnini projekcije Π_2 predstavljaju ortogonalne projekcije različitih krivulja i ploha prostora. Više o teorijama projiciranja zainteresirani čitatelj može pronaći u knjigama hrvatskog geometričara Vilka Ničea (1902. – 1987.).

Razvijeno prostorno mišljenje, prostorni zor i sposobnost vizualizacije danas su možda još i traženije kvalitete u svijetu, nego primjerice prije 20 godina, a za očekivati je da će potreba za njima rasti s daljnjim razvojem ICT tehnologije (Lilić 2016.; Čižmešija i sur. 2010.; Radović i sur. 2011.). Ove kvalitete ključne su za uspješno formiranje temeljnih kompetencija budućih inženjera tehničkih područja (npr. struke koje ne mogu opstati bez vizualizacije prostora, struke poput građevinarstva, arhitekture, geografa, kartografa, strojara, brodograditelja, astronoma, slikara, grafičkih dizajnera. . .).

Istaknimo neke od osnovnih sadržaja iz područja nacrtne geometrije unutar kojih se razvijaju prostorno i geometrijsko mišljenje te kompetencije neophodne za suvremeno obrazovanje tehničkih područja:

- učinkovito koristiti projekcije kao prikaze i znati odrediti projekcije
- biti osposobljen za apstraktno i prostorno mišljenje te logičko zaključivanje kroz rješavanje prostornih problema i njihovu primjenu u različitim kontekstima, uključujući i svijet rada
- razumjeti osnovne principe konstruktivnog rješavanja problema
- upoznati osnovna svojstva, načine generiranja krivulja (ravninskih i prostornih) i njihovu konstruktivnu obradu
- upoznati osnovna svojstva, načine generiranja i osnovnu obradu ploha odgovarajućim konstruktivnim metodama
- učinkovito primjenjivati tehnologiju kroz rad s CAD programima (2D i 3D).

Razvijanje prostornog mišljenja i prostornog zora vrlo je kompleksno i potrebno ga je promatrati s

različitih stajališta. Primjerice s matematičkog stajališta kroz poticanje različitih učeničkih/studentskih aktivnosti kojima se olakšava proširivanje područja primjene geometrijskih znanja i učinkovita primjena suvremene tehnologije. Drugi aspekt je svakako kognitivni budući da korištenje vizualnog prikaza objekata obuhvaća različite kognitivne procese (niže i više nivoe): npr. percepciju, razumijevanje, zaključivanje, učenje, simboličku konstrukciju (reprezentaciju). Iako se kognitivna pitanja mogu činiti manje važna, s didaktičkog (i s učeničkog) gledišta to su ona pitanja čiji odgovori mogu omogućiti *razvoj viših razina kognitivnoga funkcioniranja kod djece i mladih*, jedne od temeljnih smjernica Nacionalnoga kurikuluma (prijedlog ONK 2016.).

Zanimljivo je da brojne kognitivne teorije ističu važnost dugotrajnog razvijanja prostornog mišljenja pa nije teško razumjeti problematiku poučavanja geometrijskih sadržaja na razini visokog obrazovanja. U ovom članku veći naglasak će se staviti na matematički pristup kroz različite geometrijske sadržaje, a kognitivnu problematiku ostavljamo za neku drugu priliku.

Uvođenje novih tema u geometriju prostora

Nacrtna geometrija se, uz matematiku, javlja kao predmet u trenutno aktualnom NOK-u u okviru predmetne strukture matematičkog područja uz implementiranje samo dijela njezina sadržaja u ovom području. Novim prijedlogom ONK-a dolazi do izmjena, ne samo u pozicioniranju ovog predmeta u matematičkom području (budući da se ističe kako se *matematičko područje ostvaruje u svim odgojno-obrazovnim ciklusima pivenstveno kao nastavni predmet Matematika, a u određenim srednjoškolskim programima provodi se i u sklopu predmeta koji se temelje na matematičkoj znanosti*) već i u sadržajnoj zastupljenosti tema iz geometrije prostora u matematičkom području. Moguće je da bi takav pristup geometriji prostora mogao imati negativne posljedice na daljnji razvoj prostornog (i geometrijskog) mišljenja u svim obrazovnim razinama.

Na razini tercijarnog obrazovanja, uz nedovoljno razvijene specifične kompetencije učenika (i nastavnika), brojni problemi pri jačem razvijanju prostornog razmišljanja i geometrijskih sadržaja unutar geometrijskih kolegija nastaju uslijed:

- I. nedovoljne zastupljenosti tema iz geometrije prostora u hrvatskim kurikulumskim dokumentima
- II. diskontinuiteta u poučavanju geometrijskih sadržaja
- III. nepravilnog usvajanja osnovnih geometrijskih koncepta.

Metode nacrtna geometrije usmjerene su na razumijevanje i primjenjivanje različitih projekcija te istraživanje geometrijskih oblika u svakodnevnom okruženju. Na različitim (tehničkim) objektima, pojavljuju se samo dijelovi krivulja i ploha, a njihova konstruktivna obrada, temeljena na osnovnim diferencijalno geometrijskim konstrukcijama, često je nužna i za njihovu praktičnu upotrebu. Razumijevanje različitih vrsta projekcija (npr. perspektiva, paralelna projekcija, ortogonalna projekcija, stereografska projekcija...) služi kao osnova za daljnje rješavanje problema, planimetrijskih i stereometrijskih. Pritom je često neophodno kombinirati nekoliko matematičkih procesa, poput prostornog zora, logičkog mišljenja, argumentiranja i zaključivanja, uz primjenu geometrijskih znanja o objektima, preslikavanjima, projiciranju i grafičkom prikazu, uvažavajući pritom (i razvijajući) individualne motoričke sposobnosti učenika.

Suvremeni računalni alati omogućuju proširivanje tradicionalnog konstruktivnog područja obrade krivulja i ploha (npr. ravninske i prostorne krivulje, plohe 2. reda, rotacijske / zavojne / pravčaste / cijevne / kanalne / kružne / klizne plohe...) na posebno oblikovane krivulje i plohe zadane kontrolnim točkama (npr. NURBS i B-Spline krivulje i plohe). Uz tradicionalno konstruktivno rješavanje problema, ovisno o njegovoj složenosti, potrebno je kombinirati različite metode rješavanja problema (korištenje geometrijskog pribora, prostoručno skiciranje i/ili korištenje računala s projektorom za prezentacije, korištenje računalnih programa za crtanje i modeliranje).

Promotrimo nešto detaljnije već spomenute probleme u razvoju prostornog razmišljanja.

I. Nedovoljna zastupljenost tema iz geometrije prostora u hrvatskim kurikulumskim dokumentima. Tradicionalna podjela matematičkih tema u Hrvatskoj temeljila se na podjeli na geometrijske i aritmetičke teme, iako to važećim kurikulumskim dokumentima nije posebno istaknuto (hrvatski nacionalni dokumenti 2016.). Poput matematičkih, geometrijske kompetencije se ostvaruju kroz geometrijske aktivnosti, kombinirajući pritom odgovarajuće matematičke procese i geometrijske koncepte sadržane prema novom kurikulumskom pristupu u domenama *Oblik i prostor* i *Mjerenje*.

Kratok osvrt na okvir unutar kojeg se razvija geometrija prostora na razini osnovnoškolskog obrazovanja dan je u diplomskom radu *Geometrija prostora u razrednoj nastavi* objavljenom 2016. godine (Lilić 2016.). U radu je, između ostalog, istaknuta analiza udjela geometrijskih tema unutar matematičkih tema definiranih trenutno važećim Nastavnim planom i programom za osnovnu školu. Pokazalo se kako u razrednoj nastavi, od određenih 97 tema iz matematike tek 29,9 % je geometrijskih, dok je 70,1 % aritmetičkih (str. 31.). Udio geometrijskih tema u predmetnoj nastavi matematike nešto je veći i iznosi (37,4 %), tj. 49 od 131 matematičke teme (str. 35.). Pritom ukupni udio tema iz geometrije prostora od 1. do 8. razreda iznosi samo 4,39 %, tj. 10 od ukupno 228 matematičkih tema (str. 38.).

Provedeno istraživanje pokazalo je da u hrvatskim kurikulumskim dokumentima uvelike dominiraju tradicionalno aritmetičke teme što za direktnu posljedicu ima nedovoljnu zastupljenost tema iz geometrije prostora u osnovnoškolskim i srednjoškolskim udžbenicima. Osim toga, provedena analiza pojedinih osnovnoškolskih udžbenika pokazala je da su u njima uglavnom zadatci sličnog tipa i da su aktivnosti primarno usmjerene na postizanje odrednica *Nastavnog plana i programa* koje su zadane ključnim pojmovima i očekivanim postignućima, a vrlo je *malo aktivnosti koje usmjeravaju razvoj geometrijskog mišljenja prema višim razinama*, (Lilić 2016., str. 80).

Nadalje, promotrimo li zastupljenost tema iz geometrije prostora u srednjoškolskim udžbenicima, možemo uočiti da se, sadržajno, geometrija prostora spominje samo u 1. razredu prirodoslovnih gimnazija (jedno poglavlje: Izometrije prostora), te u 2. razredu svih srednjoškolskih programa (dva poglavlja: Geometrija prostora, Poliedri i rotacijska tijela). Stoga pomalo zabrinjava činjenica kako je, primjerice, u domeni *Oblik i prostor* najnovijeg prijedloga Nacionalnog kurikulumu geometrija prostora više zastupljena u nižim obrazovnim ciklusima, dok se u 5. ciklusu ona ne spominje niti izričito, a niti jednom opisu učeničkih postignuća.

II. Diskontinuitet u poučavanju geometrijskih sadržaja. Istraživanje u navedenom diplomskom radu pokazuje da postoji veliki vremenski razmak između obrada dviju prostornih tema (tablica Lilić 2016., str. 37.) što može otežati kvalitetan razvoj geometrijskog mišljenja.

Razred	Broj tema iz geometrije	Broj tema iz geometrije prostora	Udio
1.	6	1	16.67 %
2.	2	0	0 %
3.	8	0	0 %
4.	13	1	7.69 %
5.	8	0	0 %
6.	13	0	0 %
7.	10	0	0 %
8.	18	8	44.44 %
ukupno	78	10	12.82 %

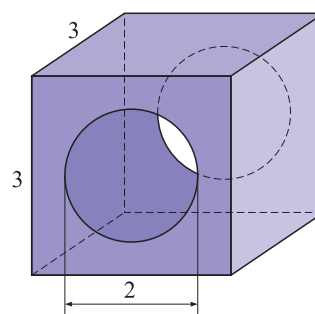
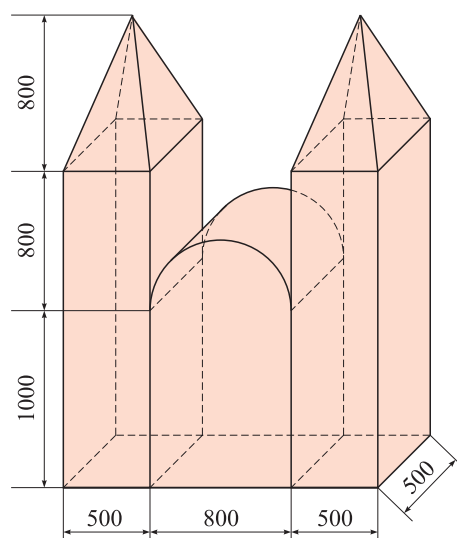
Svakako postoji zabrinutost da se ovakav diskontinuitet u pristupu geometriji prostora, te isključivo postizanje odrednica Nacionalnog kurikulumu, iz osnovnoškolskog sustava preslika na formiranje matematičkih aktivnosti na srednjoškolskoj razini.

III. Nepravilno usvajanje osnovnih geometrijskih pojmova. S didaktičkog stajališta ovaj problem je

iznimno važan, pogotovo kod učenika s lošije razvijenom sposobnosti vizualizacije. Primjerice:

• **Pogrešna upotreba crteža u razvijanju vizualizacije.** Npr. sljedeća dva crteža odabrana su među brojnim zadacima na koje se može naići u pretraživanju interneta, a namijenjeni su radu na satu matematike u okviru određivanja oplošja ili obujama danih tijela. Zadatci ovakvog tipa uglavnom se zadaju samo crtežom. Naravno, nužno je pretpostaviti da bi učenici sami, bez dodatne intervencije nastavnika, trebali na ovoj obrazovnoj razini "pročitati crtež" i samostalno riješiti zadatak.

Ispravno zadavanje vidljivih i nevidljivih bridova olakšava razumijevanje crteža i omogućuje anali-



zu složene strukture (ili istaknuti samo sve vidljive bridove tijela, ili istaknuti sve vidljive i nevidljive bridove) što na niti jednoj od odabranih dviju slika nije slučaj. Osim toga, pri zadavanju mjernih kota na crtežu, za očekivati je da zadatak bude jednoznačno definiran (neispravno zadavanje visine piramide ili bočnog brida piramide).

Upotreba crteža u nastavi geometrije je poželjna (i neophodna), ali korištenje crteža u prikazivanju prostornih situacija, s didaktičke strane, složeni je problem koji zahtijeva razlikovanje prostornih 3D objekata i njihovih ravninskih 2D prikaza (teorija projiciranja). Vizualizacija koju pritom koristimo je jedan od kognitivnih procesa koji omogućuju uspješno rješavanje problema i ne može se odvijati zasebno, bez uvažavanja odgovarajućih pravila (i znanja) o prikazivanju objekata (Duval 2002.).

“Čitanje prostornih crteža”, nužno je za daljnje rješavanje prostornih problema i može predstavljati problem kod učenika s nižom razinom vizualizacije, ali i kod učenika s bolje razvijenom sposobnošću zora ponekad pogrešno upućuje na proizvoljno interpretiranje crteža.

- *Pogrešno korištenje geometrijske terminologije u matematičkoj literaturi.* Npr., sljedeća definicija korištena je u rješavanju jednog matematičkog zadatka: *Plohe koje se dobiju pravčastim spajanjem krivulja zovu se ravne (engl. ruled surface, engl. ruler – ravvalo).* Ova pogrešna definicija jednog geometrijskog koncepta, pravčastih ploha, nastala uslijed pogrešnog prijevoda engleske terminologije, može kod učenika/studenata uzrokovati još veće nerazumijevanje geometrijskih konceptata.

- *Neadekvatna kontekstualizacija prostornih problema* čime se onemogućuje razvoj prostornog razmišljanja te daljnje produbljivanje geometrijskih znanja (Sliško 2015.).

Upotreba novih alata u nastavi geometrije prostora

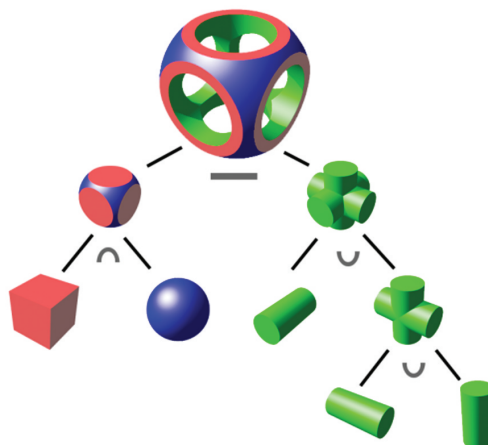
CAD programi

U okviru razmatranja geometrijskih sadržaja neophodno je osvrnuti se i na korištenje računala u razvijanju prostornog razmišljanja.

Računalna grafika je grana računalnih znanosti koja se bavi izgradnjom višedimenzionalnih modela i njihovim prikazom uz upotrebu računala. Uključuje kreiranje, spremanje i manipulaciju grafičkih prikaza raznih objekata kao i modela iz raznih područja (npr. fizički modeli, matematičke strukture, inženjerski i arhitektonski modeli, apstraktne strukture...).

Između ostalog, ona omogućuju i razvijanje digitalne kompetencije¹, također jedne od 8 temeljnih obrazovnih kompetencija.

CAD (engl. **C**omputer **A**ided **D**esign) programi omogućuju računalom podržano prikazivanje, modificiranje i geometrijsko analiziranje ravninskih i



¹ Digitalna kompetencija odnosi se na osposobljenost za sigurnu i kritičku upotrebu informacijsko-komunikacijske tehnologije za rad, u osobnomu i društvenomu životu te u komunikaciji. Njezini su ključni elementi osnovne informacijsko-komunikacijske vještine i sposobnosti: upotreba računala za pronalaženje, procjenu, pohranjivanje, stvaranje, prikazivanje i razmjenu informacija te razvijanje suradničkih mreža putem interneta.

prostornih objekata. Neki od poznatijih komercijalnih programa su: AutoCAD, SolidWork, ArchiCAD, Rhinoceros, Microstation, CATIA... Najveće razlike među komercijalnim CAD sustavima uočavaju se u vrstama krivulja i ploha koje podržavaju, načinima njihova definiranja i mogućnostima manipulacije njima (izrezivanje, spajanje, modificiranje...).

Rukovanje ovim novim alatima koji zamjenjuju tradicionalni geometrijski pribor (ravalo, trokute, šestar, krivuljar...) zahtijeva, s geometrijskog stajališta, dobro poznavanje različitih geometrijskih figura, svojstava, transformacija (preslikavanja) i operacija. Osim toga, potrebno je učenike upoznati s ograničenjima u korištenju ovih novih alata.

Na prethodnoj slici istaknut je konstruktivni algoritam koji opisuje nastanak tzv. "šuplje kocke". Za konstrukciju ovog objekta, uz prepoznavanje osnovnih geometrijskih objekata neophodnih za izgradnju modela (dva rotacijska valjka, kugla i kocka, koji nisu direktno dostupni u grafičkom prikazu početnog objekta), učenik/student mora biti upoznat s različitim načinima nastajanja složenijih geometrijskih struktura, primjerice različiti objekti omeđeni ravnim ili zakrivljenim ploham nastali presijecanjem osnovnih geometrijskih tijela ravninom, ili prodiranjem dvaju osnovnih tijela. Korištenje *skupovnih Booleovih operacija* (unija "U", presjek "∩", razlika "\") na tijelima jedna je od temeljnih metoda u kreiranju novih geometrijskih struktura.

Primjena algoritama u geometrijskom modeliranju je poželjna jer s pomoću njih učenik/student raščlanjuje složenije probleme na manje nezavisne dijelove koje samostalno rješava i na kraju ih povezuje u funkcionalnu cjelinu, čime se vizualizira algoritamski način razmišljanja. Učenik/student se pritom *korišti računalom kao alatom za bolju produktivnost, rješavanje problema*. Prikaz rješenja najbolje je istaknuti korištenjem prostoručne skice koja može poslužiti i kao temelj za daljnje algoritamsko rješavanje problema u odgovarajućem programskom jeziku. Vidimo kako ovaj primjer grafičkog zadavanja problema, omogućuje povezivanje geometrijskih sadržaja s tehničkim i informatičkim područjem čime se ostvaruje međupredmetna povezanost u kurikulumu.

Novi računalni alati mnogo su kompleksniji i složeniji od tradicionalno korištenih pa se njihovom primjenom u nastavi otvaraju brojna didaktička pitanja. Potrebe tržišta rada na razini visokog obrazovanja su iznimno velike i ne možemo zanemariti činjenicu da su trenutno studentima dostupni različiti 3D CAD računalni programi čija razina operativnog rješavanja problema raste iz dana u dan. Jedno od temeljnih pitanja na koje brojni metodičari nude različite odgovore je, je li puko izvršavanje naredbi vrlina ili pak mana primjene računala u nastavi, (Glasnović 2008.). Za razliku od informatičkih predmeta/kolegija u kojima se pri radu s CAD programima fokus stavlja na izvršavanje naredbi, u okviru geometrijskog obrazovanja, CAD programi se koriste za daljnje razvijanje geometrijskog razmišljanja. S druge strane, geometrijski pristup korištenju CAD programa u nastavi postavlja temelje za kombiniranje različitih kurikulumskih (matematičkog, tehničkog i informatičkog, prirodoslovnog) područja (Asperl 2005.)

- *Korištenje računalne tehnologije* – Osnovno vježbanje, upoznavanje i osposobljavanje korisnika s novom računalnom tehnologijom preporuča se izvoditi zasebno, na najjednostavnijim primjerima.
- *Izvođenje planimetrijskih (2D) i stereometrijskih (3D) konstrukcija* – Rad s 2D programima služi kao ulaz u računalom potpomognuto geometrijsko učenje i konstruktivno rješavanje geometrijskih problema. Daljnji rad s 3D programima često će zahtijevati ponovno korištenje planimetrijskih konstrukcija pa je stoga neophodno najprije ovladati radom s 2D programima, a tek tada prijeći na rješavanje prostornih problema.
- *Rad s računalnim primitivima* – Velika razlika u radu s računalnim programima, u odnosu na ručno crtanje, mogućnost je korištenja gotovih ili polugotovih objekata (biblioteke objekata). Kako bi se ovi objekti mogli generirati s pomoću računalnog programa, potrebno je najprije poznavati njihovu geometrijsku strukturu i tek tada se može pozvati odgovarajuća naredba kojom se željeni objekt generira na zaslonu računala.

Različite vrste primitiva pomažu u upoznavanju ograničenja korištenja računala kao alata.

- *Razumijevanje tehnika projiciranja* – površina zaslona računala, na kojoj se prikazuje rezultat rada s računalom, dvodimenzionalni je izlazni medij i prikazuje 2D prikaze 3D objekata. Objekti se prikazuju kombiniranjem različitih metoda projiciranja pa je neophodno razumjeti svojstva korištenih projekcija kako bi se ispravno interpretirao prikaz objekta na zaslonu i sve potrebne mjerne vrijednosti.

I dok suvremeni nastavni planovi vezani uz geometriju na globalnoj razini donose značajne inovacije, primjerice 3D CAD programi postaju jedan od temeljnih alata za analiziranje složenih prostornih problema, u Hrvatskoj se 3D CAD programi uvode u nastavu geometrije tek na pojedinim fakultetima na visokoškolskoj razini. Brojne srednje škole, kao i fakulteti, poučavaju CAD programe isključivo unutar informatičkog područja. Problemi ovako kasnog uvođenja 3D CAD programa u geometrijska područja u hrvatskom obrazovnom sustavu postaju kompleksniji jer je na ovoj razini, u svrhu uspješnog razvijanja generičkih i specifičnih kompetencija studenata, neophodno koristiti se komercijalnim (složenije za rad, a i financijski zahtjevnije) računalnim 3D CAD programima koji, uz dobro poznavanje geometrijskih objekata i njihovih svojstava, zahtijevaju vrlo dobro korištenje računalne tehnologije.

Kao posljedica, umjesto da se razumijevanje geometrije prostora na razini visokog obrazovanja proširuje sukladno specifičnim interesima različitih struka, velik broj studenata se mora "ponovno upoznavati" s osnovnim geometrijskim konceptima i njihovim svojstvima (npr. uvjet okomitosti pravca i ravnine, određivanje kuta između dvaju pravaca u prostoru, određivanje kuta između dviju ravnina. . .) i specifičnom geometrijskom terminologijom (npr. čvrsti elementi preslikavanja, jednoznačnost zadavanja transformacija i objekata u prostoru. . .), a uz sve to potrebno je razvijati osnove korištenja računalne tehnologije.

Za kraj, uočimo da je i *prostoručno crtanje* neophodan alat za izražavanje ideja, kao i za njihovo nezavisno prezentiranje, te ga je neophodno razvijati

unutar nastavnog procesa. Najčešće se prostorne skice izvode uvažavajući zakonitosti paralelnog projiciranja (npr. kosa projekcija, Kurnik 2008.).

Korištenjem različitih alata (računalo, olovka, geometrijski pribor) u nastavi geometrije povećava se mogućnost odabira metoda rješavanja problema čime se može osigurati razvijanje viših kognitivnih razina učenika. Pritom je ključno da učenik/student samostalno donosi odluku o odabiru odgovarajuće metode za rješavanje problema.

Promotrimo tipični stereometrijski problem određivanja udaljenosti dviju točaka (tzv. prava veličina dužine). Pri rješavanju prostornog problema potrebno je najprije odgovoriti na neka ključna pitanja:

- *Zašto?* (npr. zato što želimo mjeriti duljinu dužine, ili želimo nanositi određenu duljinu na pravac, ili želimo istaknuti učeniku koji pogled je potreban da se u njemu vidi prava veličina, ili . . .)
- *Kako?* (npr. možemo se koristiti *analitičkim pristupom* (primjenom Pitagorina poučka), ili *geometrijskim pristupom* (projiciranjem i korištenjem pomoćnog trokuta (ili trapeza)), ili problem riješiti *programiranjem* (potrebno je još samo dodatno znanje o odgovarajućem programskom jeziku)).

U praksi, odgovor na pitanje "Zašto?" ovisit će o realnoj situaciji koju određuje struka, dok će odgovor na pitanje "Kako?" ovisiti o mogućnostima pojedinca koje će biti uvjetovane širinom geometrijskog znanja. Za samo rješavanje problema bilo bi dovoljno koristiti se jednim od gore istaknutih, ali s didaktičkog stajališta važno je da učenik/student sam zna prepoznati situaciju i odabrati optimalnu metodu rješavanja problema koja će naravno ovisiti i o vrsti dostupnih podataka (npr. grafički prikaz, tekstualni zapis. . .). Dakle, za postizanje viših kognitivnih razina nastavnik mora učenika upoznati s različitim metodama rješavanja problema. Pritom, geometrijski (konstruktivni) pristup također ne nudi jedinstven put do rješenja. Možemo npr. kombinirati metodu ortogonalnog projiciranja pogodno odabirući glavne ravnine projekcije, ili metodu stranocrta, ili metodu rotacije, ili se koristiti CAD programom.

Zaključak

Posljednjih desetak godina i u Hrvatskoj možemo vidjeti vrlo vrijedne primjere primjena računala u osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj nastavi geometrije kroz upotrebu različitih dinamičkih programa (npr. GeoGebra, The Geometer's Sketchpad...). Iako se u mnogim slučajevima računala uglavnom primjenjuju u rješavanju i prikazivanju ravninskih situacija, poneki nastavnici ih koriste i za prikazivanje (i rješavanje) prostornih situacija. Ipak, moje je mišljenje da se (nažalost) unutar postojećeg prijedloga nacionalnog kurikulumu (unutar matematičkog područja) prostorno mišljenje i geometrija prostora mogu otežano razvijati u nižim obrazovnim ciklusima (1. – 5. ciklus).

Posljedice slabijeg razvoja prostornog mišljenja mogu, s jedne strane, utjecati na slabije razvijanje viših kognitivnih razina (Duval 2002.), a s druge strane, mogu otežati razvoj digitalne kompetencije. Osim toga, promatrajući vertikalnu geometrijskog obrazovanja, nedovoljno razvijanje geometrije prostora na nižim obrazovnim razinama uzrokuje niz problema na razini visokog obrazovanja (posebice tehničkih područja) gdje se nudi sve manje prostora za konkretnu primjenu i daljnje razvijanje prostornog i geometrijskog mišljenja vezano uz specifične struke (Kovačević i Jurkin 2013.).

Dakle, život i rad u suvremenom društvu brzih promjena zahtijeva nova znanja, vještine i sposobnosti koje stavljaju naglasak na razvoj novih kompetencija pojedinca (NOK 2011.). Novi (računalni, konstruktivni) alati omogućuju razvijanje novih konstruktivnih metoda kroz otvaranje novih sadržaja. Imajući ovo na umu, neophodno je za daljnji razvoj geometrijskog razmišljanja osigurati okruženje, poticanje i dugoročnu podršku tijekom cijelog nastavnog procesa u svim obrazovnim razinama (prijedlog ONK 2016.). Kombiniranjem različitih prikaza istog objekta, te različitih geometrijskih (i konstrukcijskih) metoda omogućava se razvijanje različitih oblika mišljenja učenika/studenata. Primjerice, obrazlaganjem položaja danog objekta na temelju grafičkog prikaza, obrazlaganjem argumenata za ili protiv upotrebe odgovarajućih prikaza, navođenjem argumenata za ili protiv određene

pretpostavke, interpretacije ili rješenja razvija se argumentiranje koje, u ovom slučaju, zahtijeva ispravno korištenje geometrijske terminologije (u pisanom ili usmenom obliku).

LITERATURA

- 1/ A. Asperl (2005.): *How to teach CAD*, Computer-Aided Design & Application, Sv. 2 (1–4), str. 459–468.
- 2/ A. Čizmešija, R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie (2010.): *Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole*, Zbornik radova 4. kongresa nastavnika matematike RH, 143–162.
- 3/ R. Duval (2002.): *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning*, u Hitt, Fernando (ur.), *Representations and Mathematics Visualization*, Dio III, str. 311–336.
- 4/ D. Glasnović Gracin (2008.): *Računalo u nastavi matematike: Teorijska podloga i metodološke smjernice (I. dio, II. dio)*, Matematika i škola 46, str. 10–15, Matematika i škola 47, str. 81–84.
- 5/ N. Kovačević, E. Jurkin (2013.): *Geometrija u svijetu 3D modeliranja*, Poučak 55, str. 39–46.
- 6/ Z. Kurnik (2008.): *Kosa projekcija*, Matematika i škola 46, str. 4–9.
- 7/ V. Lilić (2016.): *Diplomski rad – Geometrija prostora u razrednoj nastavi* (mentor: P. Vuković, D. Glasnović Gracin).
- 8/ V. Niče (1980.): *Deskriptivna geometrija (I. dio, II. dio)*, Školska knjiga, Zagreb.
- 9/ N. Radović, R. Svedrec, T. Soucie, I. Kokić (2012.): *Vizualizacija prostora*, Poučak 49, str. 49–68.
- 10/ J. Sliško (2015.): *Neadekvatna kontekstualizacija problema u školskoj fizici i matematici*, Matematika i škola 80, str. 195–200.
- 11/ austrijski nacionalni dokumenti:
<http://www.geometrieкомпетенzen.at/>
pristupano 18.5.2016.
- 12/ hrvatski nacionalni dokumenti:
<http://public.mzos.hr/>
NOK – Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje (2011.)
Nastavni plan i program za osnovnu školu (2006.)
Prijedlog – Okvir nacionalnoga kurikulumu (veljača 2016.)
Prijedlog kurikularnih dokumenata – nacionalni dokumenti područja (veljača 2016.).