

O sadržajima iz kombinatorike u početnoj nastavi matematike

Sanja Rukavina, Rijeka

Kombinatorika, kao dio matematike u čijoj je domeni prebrojavanje elemenata konačnih skupova, prirodno je utkana u sadržaje osnovnoškolske matematike od samih početaka.

Neki će učenici nižih razreda osnovne škole rješavati zadatke poput ovih:

“Ana ima 2 majice i 3 suknje. Na koliko različitih načina može odabrati po jednu majicu i suknju koje će obući za izlazak u kino?”

ili

“U jednom je razredu 13 dječaka. Postoje li među njima dva dječaka koji imaju rođendan u istom mjesecu?”

Izuzetno je bitno da oni koji poučavaju učenike u ovim zadacima mogu prepoznati odgovarajuća načela prebrojavanja i znaju osmisлити još poneki zadatak čije se rješavanje temelji na nekom od tih načela. U suprotnom, učenici ostaju zaklinuti za iskustvo otkrivanja i razumijevanja općih matematičkih principa koji se kriju iza ovih zadataka.

Sadržaji kombinatorike, iako prisutni u nastavi matematike, uglavnom nisu kao takvi posebno istaknuti. Stoga se u proces edukacije budućih učitelja razredne nastave ponekad nedovoljno uključuju osnovni sadržaji tog dijela matematike. Iako se



ne očekuje da se matematički sadržaji u početnoj nastavi matematike poučavaju uz neprestano ukazivanje na opće matematičke zakonitosti koje se u tim sadržajima kriju, bilo bi dobro kada bi učitelji razredne nastave bili svjesni barem dijela tih općih zakonitosti i činjenica koje će kasnije, tijekom svog obrazovanja, zahvaljujući njima učenici spoznati. U nastavku ćemo, kroz nekoliko primjera, ukazati na prisutnost načela jednakosti, načela zbroja, načela produkta, Dirichletova načela i formule uključivanja-isključivanja u početnoj nastavi matematike.

Načelo jednakosti

Ono što u kombinatorici nazivamo načelom jednakosti ili načelom bijektivne korespondencije u početnoj se nastavi matematike pojavljuje već pri početnom formiranju pojma broja, odnosno razumijevanju činjenice zbog čega možemo za neke skupove reći da se sastoje od 5 elemenata (jabuka, lopta, knjiga...), a za neke druge da imaju npr. 12 elemenata, čak i u onim slučajevima kada nismo prebrojili elemente danog skupa. U početnoj se nastavi matematike, primjerice, mogu zadavati zadatci poput ovog: "Zamislimo da je svaka od djevojčica 1.a razreda danas u školu došla s jednom mašnom u kosi. Koliko je to ukupno mašna ako znamo da je danas na nastavi 11 djevojčica 1.a razreda?". Pitanjima poput "Ako bismo svakoj od tih djevojčica htjeli dati bombon, koliko bi nam bombona za to bilo potrebno?" dodatno se ukazuje na činjenicu kako, znajući da promatrani skupovi (djevojčice, mašne, bomboni) imaju jednako mnogo elemenata, ne moramo svaki puta iznova prebrojavati elemente promatranog skupa. Na ovoj je razini primjene načelo jednakosti učenicima vrlo prirodno i većina će bez problema rješavati takve zadatke. Učitelji, s druge strane, postavljajući ovakva pitanja u odgovarajućim situacijama, stvaraju temelj za složeniju primjenu ovog načela u starijoj dobi.

Također, znajući da 2017. godina ima 365 dana učenici će s lakoćom rješavati zadatke poput ovog: "Svaki dan Dariov tata otrgne jedan list kalendara. Koliko će listova kalendara Dariov tata otrgnuti u 2017. godini?". Kada je prebrojavanje elemenata nekog skupa (listova kalendara) dugotrajno, ili nam nije poznato kako to možemo učiniti, tada se za određivanje broja elemenata u tom skupu možemo koristiti činjenicom da se radi o skupu koji je bijekcija s promatranim skupom (dani u godini) čiji nam je broj elemenata poznat. Ovaj postupak spontano primjenjujemo u jednostavnim slučajevima, ali, općenito, utvrđivanje činjenice da postoji bijekcija između dva skupa može biti težak problem. Uočimo da načelo bijektivne korespondencije ne govori o tome kako prebrojiti elemente nekog skupa, već omogućava da se problem utvrđivanja broja elemenata promatranog skupa svede na prob-

lem utvrđivanja broja elemenata nekog drugog skupa za koji je to lakše učiniti ili čiji je broj elemenata poznat. Zbog toga se vrlo često primjenjuje zajedno s ostalim načelima prebrojavanja.

Dirichletovo načelo

Uočimo da su u uvodnom zadatku "U jednom je razredu 13 dječaka. Postoje li među njima dva dječaka koji imaju rođendan u istom mjesecu?" dana dva skupa (skup dječaka i skup mjeseci u godini) koji nemaju isti broj elemenata, odnosno skupovi među kojima nije moguće uspostaviti bijekciju. U mnogim je takvim zadacima "očito" kada je za njihovo rješavanje potrebno koristiti se Dirichletovim načelom, o kojemu se više može pročitati u 28. broju MiŠ-a. Pri rješavanju ovog zadatka primjenjuje se slaba forma Dirichletova načela: Ako je $n + 1$ predmeta raspoređeno u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem 2 predmeta. Naime, znajući da ima 12 različitih mjeseci (kutije), iz činjenice da je u razredu 13 učenika (predmeti) zaključujemo da postoji barem jedan mjesec u kojem barem dva dječaka tog razreda imaju rođendan, pa je odgovor na postavljeno pitanje potvrđan.

Dirichletovo načelo, mogućnosti čije se primjene tek naziru u nastavi matematike u prva četiri razreda osnovne škole, jedna je od standardnih tema s kojima se učenici susreću na dodatnoj nastavi iz matematike već u 5. razredu osnovne škole.

Načelo zbroja

Načelo zbroja, prema kojem je broj elemenata unije disjunktih konačnih skupova jednak zbroju broja elemenata tih skupova, također se vrlo rano primjenjuje. U prvom razredu osnovne škole nalazimo ga već u zadacima poput ovog: "Ante ima 5 bijelih i 3 crvena balona. Koliko ukupno balona ima Ante?". Znajući da crveni balon ne može istovremeno biti i bijeli (disjunktnost skupova) učenici će izračunati ukupan broj balona. S druge strane zadatak "Za vrijeme Škole u prirodi učenici 4.a razreda prikupili su za školski herbarij 12 različitih vrsta biljaka,

a učenici 4.b razreda prikupili su 15 različitih vrsta biljaka. Koliko su različitih vrsta biljaka zajedno prikupili?" nije potpun, jer njegovo rješavanje zahtijeva informaciju o tome jesu li sve prikupljene biljke međusobno različite (disjunktni skupovi) ili se među prikupljenim biljkama nalaze neke biljke iste vrste (skupovi nisu disjunktni). Ako se radi o međusobno disjunktним skupovima (sve prikupljene biljke su različite vrste), primjenom načela zbroja zaključujemo da je ukupno prikupljeno 27 vrsta biljaka. U drugom je slučaju pri rješavanju zadatka od ukupnog broja prikupljenih biljaka ($12 + 15$) potrebno oduzeti broj onih biljaka koje se nalaze i među biljkama koje su prikupili učenici 4.a razreda i među biljkama koje su prikupili učenici 4.b razreda, što predstavlja primjenu formule uključivanja-isključivanja. Ponekad se događa da se u ovakvim zadacima podrazumijeva, ali ne navodi, da se radi o disjunktним skupovima, iako oni to ne moraju biti. Često ponavljanje tako pogrešno postavljenih zadataka može učenicima otežati proces razumijevanja pravilnih postupaka rješavanja zadataka u kojima će biti očito da se ne radi o disjunktним skupovima pa bi učitelji morali biti oprezni pri zadavanju zadataka u kojima očekuju primjenu načela zbroja, odnosno nedvosmisleno utvrditi disjunktnost skupova koji se promatraju.

Formula uključivanja-isključivanja

Učitelji, posebice oni koji realiziraju dodatnu nastavu matematike u prva četiri razreda osnovne škole, trebali bi biti upoznati s mogućnostima primjene formule uključivanja-isključivanja i njezinim općim oblikom koji je dan formulom

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} |A_I|,$$

pri čemu se zbraja po svim nepraznim podskupovima skupa $\{1, \dots, n\}$ i vrijedi $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Prema formuli uključivanja-isključivanja, broj elemenata u uniji skupova A i B određen je sa

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Označimo li u prethodnom zadatku sa A skup vrsta biljaka koje su prikupili učenici 4.a razreda, a sa B skup vrsta biljaka koje su prikupili učenici 4.b razreda za rješavanje zadatka nedostaje informacija o veličini presjeka tih dvaju skupova.

Promotrimo kroz nekoliko zadataka s natjecanja "Matematički klokan" mogućnosti za stvaranje temelja za razumijevanje formule uključivanja-isključivanja.

- Baka Barbara napravila je 11 ukusnih kolačića za svoje unuke. Najprije je 5 kolačića ukasila groždicama, a zatim 7 kolačića lješnjacima. Koliko je najmanje kolačića ukasila i lješnjacima i groždicama?

(9. zadatak, Matematički klokan, Pčelice, 2. razred OŠ, 2012.)

Označimo sa A skup kolačića ukrašenih s groždicama, a sa B skup kolačića ukrašenih s lješnjacima. Tada je $|A| = 5$ i $|B| = 7$. Uočimo da je, prema uvjetima zadatka, baka npr. mogla 5 kolačića ukasiti i groždicama i lješnjacima, potom još 2 kolačića ukasiti lješnjacima, a preostala 4 kolačića ostaviti neukrašena. Stoga je riječ "najmanje" u tekstu zadatka bitna za jednoznačnost njegova rješenja. Taj će uvjet biti zadovoljen ako je $|A \cup B| = 11$, odnosno ako su ukrašeni svi kolačići. U tom slučaju, primjenom formule uključivanja-isključivanja, slijedi da je $|A \cap B| = 1$, što je i točan odgovor na postavljeno pitanje.

Učenici će, s obzirom na uzrast, do točnog rješenja najvjerojatnije doći drugim postupkom, a ne ovim koji smo opisali. Međutim, pitanjima poput "Koliko bi kolačića ostalo neukrašeno (bilo ukrašeno) da je baka i groždicama i lješnjacima ukasila tri kolačića?", ovakvi se zadatci mogu iskoristiti kako bi se u učenika počela formirati svijest kako veličine presjeka i unije dvaju skupova nisu međusobno nezavisne.

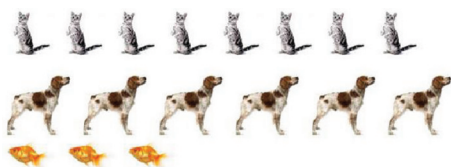
Istovjetan način razmišljanja može se primijeniti pri rješavanju zadatka:

- Baka Barbara napravila je 20 ukusnih kolačića za svoje unuke. Najprije je 15 kolačića ukrasila grožđicama, a zatim 15 kolačića lješnjacima. Koliko je najmanje kolačića ukrasila i lješnjacima i grožđicama?

(11. zadatak, Matematički klonan, Ecolier, 4. i 5. razred OŠ, 2012.)

Pogledajmo još jedan zadatak.

- Svi učenici 4.b imaju najmanje jednog i najviše dva kućna ljubimca. Ukupan broj mačaka, pasa i riba prikazan je na slici 1. Razgovarajući međusobno utvrdili su da dva učenika imaju psa i ribu, a tri učenika imaju mačku i psa. Koliko je učenika u 4.b?



Slika 1.

(10. zadatak, Matematički klonan, Ecolier, 4. i 5. razred OŠ, 2011.)

Označimo:

A – skup učenika 4.b razreda koji imaju mačke

B – skup učenika 4.b razreda koji imaju psa

C – skup učenika 4.b razreda koji imaju ribu

Prema uvjetima zadatka je: $|A| = 8$, $|B| = 6$, $|C| = 3$, $|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 0$ i $|B \cap C| = 2$ i vrijedi $|A \cap B \cap C| = 0$ (učenici imaju najviše dva kućna ljubimca).

Prema formuli uključivanja-isključivanja je

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| \\ &\quad - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 8 + 6 + 3 - 3 - 0 - 2 + 0 = 12. \end{aligned}$$

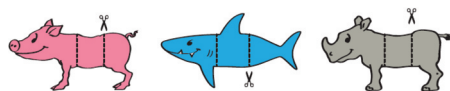
Slijedi da ukupno 12 učenika 4.b razreda ima nekog ljubimca, a kako je iz zadatka poznato da svaki učenik toga razreda ima kućnog ljubimca zaključujemo da u 4.b razredu ima 12 učenika.

Uočimo da u zadatku nije posebno istaknuto, iako se pretpostavlja da niti jedan učenik nema dvije životinje iste vrste. S obzirom na to da je, uz broj 12, jedno od ponuđenih rješenja i broj 11, bez te pretpostavke zadatak nema jednoznačno rješenje. Naime, ako dozvolimo da neki učenik promatranog razreda ima dvije mačke bilo bi $|A| = 7$, a veličine svih ostalih skupova ostaju nepromijenjene, pa je 11 također točno rješenje postavljenog zadatka. Iako se iz formulacije zadatka može naslutiti kako niti jedan učenik nema dvije mačke (za očekivati je da bi i to bilo istaknuto kao zaključak razgovora među učenicima), bilo bi bolje da među ponuđenim rješenjima nema onog koje je ishod ovakvog razmišljanja.

Načelo produkta

Osvrnimo se i na uvodni zadatak "Ana u svom ormaru ima 2 majice i 3 suknje. Na koliko različitih načina može odabrati po jednu majicu i suknju koje će obući za izlazak u kino?". Rješavanje tog zadatka zahtijeva prebrojavanje svih različitih uređenih parova (majica, suknja), o čemu govori načelo produkta koje kaže da je broj elemenata u Kartezijevu produktu konačnih skupova jednak produktu broja elemenata tih skupova. U ovom će slučaju učenici bez problema prebrojavanjem doći do 6 različitih mogućnosti i time riješiti zadatak. No, već u sljedećem zadatku prebrojavanje svih mogućnosti može učenicima biti dosta zahtjevno.

- Branko je nacrtao morskog psa, svinju i nosoroga, a zatim ih razrezao na dijelove, kao na slici. Kombinirajući njihove glave, srednje i stražnje dijelove može napraviti nove različite životinje. Koliko stvarnih i "fantastičnih" životinja Branko može napraviti?



Slika 2.

(22. zadatak, Matematički klonan, Ecolier, 4. i 5. razred OŠ, 2015.)

Riješimo postavljeni zadatak primjenom načela produkta. Uočimo tri skupa:

A – skup glava nacrtanih životinja

B – skup srednjih dijelova nacrtanih životinja

C – skup stražnjih dijelova nacrtanih životinja.

Potrebno je odrediti broj različitih uređenih trojki (glava, srednji dio, stražnji dio), odnosno broj elemenata skupa $A \times B \times C$, pa je traženi broj

$$|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \\ = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27.$$

U radu s učenicima bitno je da učenici shvate zašto je u zadacima poput ovih primjereno pomnožiti brojeve elemenata promatranih skupova (a ne ih zbrojiti kao kod primjene načela zbroja). Time će se pripremiti za usvajanje složenijih matematičkih koncepata kao što je onaj dan teoremom o uzastopnom prebrojavanju.

Teorem o uzastopnom prebrojavanju

Neka su $S_1, \dots, S_n$ konačni skupovi, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$. Neka je $S \subseteq S_1 \times \dots \times S_n$ skup uređenih n -torki $(x_1, \dots, x_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ određenih na sljedeći način:

- prvu komponentu x_1 možemo odabrati na k_1 različitih načina
- za svaku već odabranu prvu komponentu, drugu komponentu x_2 možemo odabrati na k_2 različitih načina
- ⋮
- za svaki izbor komponenata $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ posljednju komponentu x_n možemo odabrati na k_n različitih načina.

Tada je $|S| = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$.

Začetke ovakvog načina razmišljanja možemo razvijati već kod rješavanja zadataka poput ovog:

- Šifra za otvaranje starinske blagajne je troznamenkasti broj sastavljen od različitih znamenaka. Koliko različitih šifri možemo složiti koristeći se znamenkama 2, 4 i 6?

(6. zadatak, Matematički klon, Leptirići, 2. i 3. razred OŠ, 2008.)

Ovaj će zadatak učenici najvjerojatnije riješiti ispisivanjem svih 6 mogućnosti i njihovim prebrojavanjem. No, kad se postavi istovjetni zadatak u kojem će biti zadano npr. 5 različitih znamenaka koje čine šifru, to neće biti prikladan način rješavanja zadatka. Zbog toga je poželjno, u mjeri u kojoj je to moguće s obzirom na uzrast učenika, što ranije početi graditi razumijevanje matematičkih postupaka kojima će se kasnije rješavati analogni zadatci.

U ovom su tekstu navedeni samo neki primjeri zadataka koje nalazimo u početnoj nastavi matematike, a u kojima se krije primjena osnovnih načela prebrojavanja. Poznavajući matematičke koncepte čije se osnove kriju u tim zadacima, učitelj može te zadatke iskoristiti ne samo za uvježbavanje prevođenja zadataka zadanih riječima u matematički zapis i potom uvježbavanje izvođenja računskih operacija, već i za postavljanje kvalitetnih temelja za razumijevanje osnovnih načela prebrojavanja od strane učenika.

LITERATURA

- 1/ Z. Kurnik (1982.): *Pierre Gustav Lejeune Dirichlet i njegov princip*, Miš, 28, 100–104.
- 2/ M. Spira: *The bijection principle on the teaching of combinatorics*, <http://tsg.icme11.org/document/get/761>.
- 3/ HMD: *Klokani bez granica*, <http://www.matematika.hr/klokan/>.