Matematika na poštanskim markama

Branimir Dakić, Zagreb

Kao i u svakom drugom području učenja tako je i u matematici motivacija vrlo bitan čimbenik uspješnosti. Jedan od načina da se to postigne jest izbor raznovrsnih metoda, ali i tema koje su privlačne svojom prirodnošću, govore o realnim svakodnevnim situacijama. Prikazat ćemo ovdje jedan odličan primjer. Riječ je o matematici na poštanskim markama.

Poštanske marke su u tradiciji pismene komunikacije. Njihova povijest seže u 1840. godinu kada se pojavila prva poštanska marka nazvana popularno "Penny black". *Penny* jer je vrijedila jedan penny, a *black* jer je bila jednobojna i to crna. Tiskana je u 60 000 primjeraka, a na njoj je lik tada 15-godišnje engleske kraljice Viktorije. Danas je ta markica raritet na filatelističkom tržištu.

Prva hrvatska marka pojavila se 1918. godine. Na njoj je prikazan rob koji kleči i trga lance kojima je okovan. Vjerojatno se radi o aluziji na raskid Hrvatske i Austro-Ugarske. Uz natpis Hrvatska, slijeva i zdesna stoji SHS (Kraljevina Srba, Hrvata i Slovenaca), što je bila kratica naziva novonastale države čiji je dio bila i Hrvatska. Tiskano je 15 000 primjeraka što je u to doba bila dnevna potražnja, tako da je i ova marka danas rijetka i stoga vrlo cijenjena.

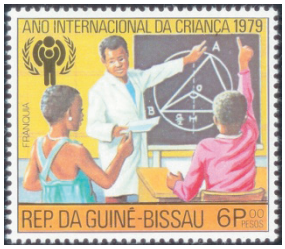
Tijekom vremena napredovao je interes za skupljanjem maraka što je svojevrstan hobi poznat pod imenom filatelija. Tiskanju je posvećivana velika pažnja, estetski kriteriji su postali vrlo strogi, a marke su bilježile sve značajnije događaje i osobe u svakodnevnom životu. Danas, nažalost, ljudi sve manje u porukama rabe pisma i okreću se elektronskoj pošti. Možda će poštanske marke uskoro otići u povijest, ali ono što su iza sebe već do sada ostavile, trajna je i neprocjenjiva kulturna baština.

U svijetu poštanskih maraka našle su svoje mjesto i one s matematičkim sadržajem. Jedna od najsadržajnijih zbirki na internetu nalazi se na adresi `http://jeff560.tripod.com/stamps.html`.

Robin Wilson, engleski profesor *emeritus* napisao je knjigu *The History of Mathematics in 300 stamps* o čijem sadržaju dovoljno govori sam naslov. Zanimljiv jednosatni videouradak s predavanjem profesora Wilsona možete pogledati na adresi `http://www.maths.ox.ac.uk/node/13353`.

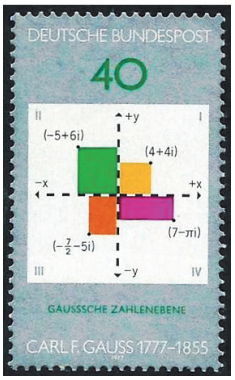
Nakon ovog uvoda prikažimo nekoliko primjera.

Branimir Dakić, prof., `dakicb@gmail.com`



Na tri gornje marke vidimo učitelja koji nešto tumači. Što? Na prvoj i drugoj marki očito je riječ o tangentama položenim iz točke na kružnicu. Što učenici mogu reći o toj temi? A što prikazuje posljednja marka? Tu se radi o poučku o obodnom i središnjem kutu kružnice.

Ove tri marke mogu nam poslužiti pri ponavljanju gradiva o kružnici.

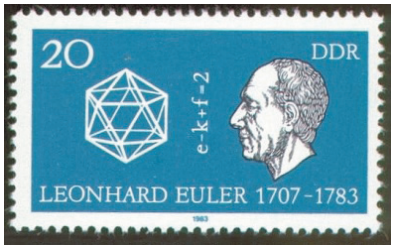


Na njemačkoj marki izdanoj u prigodi 200. obljetnice rođenja Karla Friedricha Gaussa 1977. godine, vidimo ispod slike potpis *Gausssche Ebene (Gaussova ravnina)*. Zanimljiv je izbor teme jer Gauss je poznat po nizu vrhunskih matematičkih postignuća. Ovdje je riječ o geometrijskoj interpretaciji kompleksnih brojeva, o njihovu predočenju u obliku uređenog para realnih brojeva, odnosno kao točaka u kompleksnoj ravnini koju često zovemo i Gaussova ravnina.

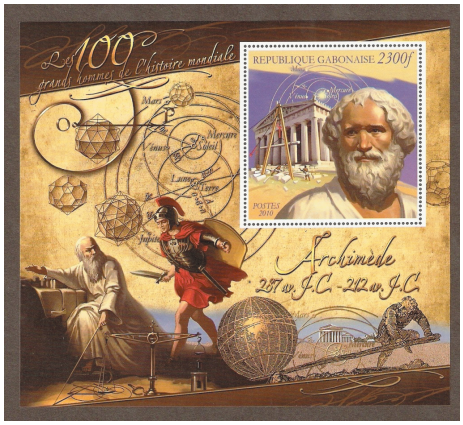
Učenicima ćemo predočiti marku te ih pozvati da opišu ono što vide na njoj. Nakon toga možemo im dati u zadatak da potraže još poneku poštansku marku posvećenu Gaussu i izrade plakat o životu i djelu ovog velikog matematičara.

Slično se može postupiti i s nekim od drugih značajnih matematičara, primjerice s Leonhardom Eulerom. Pogledajmo sljedeće dvije marke. Prva je tiskana u Čadu, druga u danas nepostojećem DDR-u. Na prvoj marki uočavamo geometrijsku konstrukciju, a riječ je o Eulerovu pravcu. Naime, vrijedi poučak: *Središte S opisane kružnice, težište T i ortocentar O svakog trokuta leže na jednom pravcu, Eulerovom pravcu. Pritom je $|OT| = 2|ST|$.*

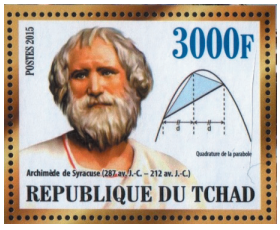
Na drugoj je marki također Euler i uz njegov lik uočavamo ikosaedar te čuvenu Eulerovu jednadžbu koja povezuje brojeve vrhova (e), bridova (k) i strana svakog poliedra $(e - k + f = 2)$. I ovdje je lijepa prigoda da se jednom matematičkom velikanu posveti malo pozornosti.



Slijedi nezaobilazni Arhimed čija se povijesna važnost može nazrijeti iz rekordnog broja maraka posvećenih nekom matematičaru. Iz toga mora izdvojimo nekoliko, a učenicima prepustimo traganje za drugima. Ova marka s prigodnim listom tiskana je u Gabonu 2010. u seriji *100 velikana svjetske povijesti*. Na njoj je nekoliko poruka. Uočavamo rimskog vojnika koji nasrće na Arhimeda dok ovaj crta po pijesku. Stara je to priča iz koje pamtimo Arhimedov uzvik "*Ne diraj moje krugove*". Tu je Arhimedo-



va spirala, a i nekoliko Arhimedovih (polupravilnih) poliedara. U donjem desnom kutu vidimo ilustraciju također čuvene izjave ovog velikana: *"Dajte mi čvrstu točku i pomaknut ću svijet"*.



U Čadu je 2015. izdana marka s Arhimedovim likom a na crtežu vidimo njegov postupak ekshaustije (iscrpljivanja) pri traženju površine ispod luka parabole. Talijani su pak Arhimedovu godinu (2013.) obilježili poštanskom markom koja je povezana s brojem π čije su decimale nanizane u pozadini crteža.

Neke teme iz matematike osobito su i široko popularne pa onda i nije čudno da su česti motivi poštanskih maraka. Navedimo neke od njih.

Prva je **prosti brojevi**. Najprije vidimo Eratostenovo sito – stari postupak za ispis niza prostih brojeva. Na drugoj marki kao i na otisku poštanskog pečata zapisano je da su brojevi $2^{11\,213}-1$ i $2^{13\,466\,917}-1$ prosti. Ti brojevi pripadaju posebnoj klasi prostih brojeva i zovu se Mersennovi brojevi. Prvi od dvaju navedenih brojeva otkriven je 1963., drugi 2001. Usput, najveći do danas otkriven Mersennov broj je broj $2^{74\,207\,281}-1$ pronađen 7. siječnja 2016. Taj broj u standardnom zapisu ima $22\,338\,618$ znamenaka.

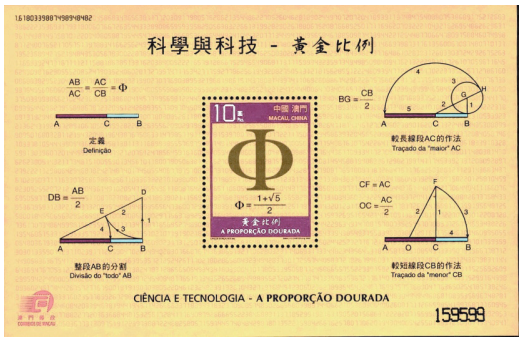
Sljedeći je primjer **veliki Fermatov poučak**. Riječ je o matematičkoj tvrdnji (teoremu) koja kaže da jednadžba $x^n + y^n = z^n$ u skupu cijelih brojeva nema rješenja za $n > 2$. Drugim riječima, Pitagorina jednadžba $x^2 + y^2 = z^2$ jedina je ovakva jednadžba s cjelobrojnim rješenjima. Danas nam je dobro poznato da ona ima beskonačno mnogo rješenja koja se uobičajeno zovu Pitagorine trojke.

O povijesti dokazivanja velikog Fermatova poučka dosta se zna, a samo podsjetimo kako je priča završena 1995. godine što nije samo u matematičkoj javnosti odjeknulo kao prvorazredna senzacija. Engleski matematičar Andrew Wiles koji je dao dokaz obasut je silnim priznanjima i počastima pa je tako i imenovan titulom "Sir". Sam je događaj zabilježen i na prigodnim markama od kojih smo odabrali tri prikazane na dnu prethodne stranice.

Sljedeći primjer je **Fibonaccijev niz**, niz brojeva u kojem su prva dva člana 1, a svaki naredni je zbroj dvaju prethodnih. To je dakle niz $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35\ldots$ Tijekom stoljeća pokazalo se kako taj niz ima uistinu nevjerojatno mnogo zanimljivih svojstava. Zar je onda čudno što je našao svoje mjesto na brojnim poštanskim markama?

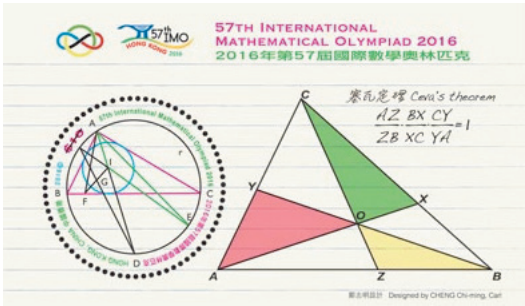
Ovdje navodimo četiri iz serije što ju je izdala pošta u Macau. Na prvoj je zorno prikazano formiranje Fibonnacijeva niza, na drugoj vidimo "zlatni broj", treća i četvrta prikazuju logaritamsku spiralu.

Poznato je da je uz Fibonaccijev niz usko vezan i zlatni (pre)rez dužine. Na sljedećoj slici vidimo list u čijoj je sredini marka a oko nje su nanizane neke konstrukcije pa bi bilo dobro potaknuti učenike da analiziraju te crteže i opišu o kakvim se konstrukcijama radi.

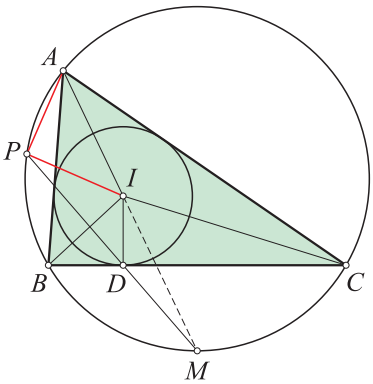


Ovim primjerima mogli bi se pridružiti još neki, primjerice **magični kvadrati**, ali potragu za tim markama prepuštamo čitateljima. Ipak, ne možemo propustiti još i sljedeći lijep primjer.

Riječ je o *listu* koji je priređen u prigodi održavanja 57. internacionalne matematičke olimpijade koja se održala u srpnju 2016. godine u Hong Kongu. Dobra je to prilika da se učenicima nešto kaže i o matematičkim natjecanjima, posebice o olimpijadi. Sam Hong Kong je također vrlo zanimljive povijesti pa se i toga možemo dotaći. Na listu je kružna marka s dva matematička problema. Desno je poznati Cevin poučak, a na lijevoj je strani marke naznačen problem koji je bio hohgkonški prijedlog na olimpijadi 2010. Zbog jasnoće evo kako glasi taj zadatak.



Neka je ABC trokut takav da je $|AB| \neq |AC|$. Upisana kružnica sa središtem I dira BC u točki D. Pravac AI siječe opisanu kružnicu u točki M, a MD siječe opisanu kružnicu trokutu ABC u P. Odredite mjeru kuta $\sphericalangle API$.



I na kraju pitanje: Kako u Hrvatskoj stojimo s markama na temu matematike? Ne čini se kako se baš možemo pohvaliti. Ipak, navedimo tri primjera.

U prigodi Svjetske matematičke godine 2000. Hrvatska je pošta izdala prigodnu marku na kojoj je *Blanušin graf*, nazvan po imenu autora Danila Blanuše (1903. – 1987.) poznatog hrvatskog matematičara. Isti je graf logotip Hrvatskog matematičkog društva. O samom grafu možete doznati više na stranicama HMD-a (`http://www.matematika.hr/o-hmd-u/prica-o-logotipu/`).

Godine 2008. napunilo se 250 godina od tiskanja knjige **Arithmetika Horvatszka**. Prva je to matematička knjiga na hrvatskom jeziku, a njezin autor svećenik Mijo Šilobod Bolšić (1724. – 1787.) potrudio se poraditi na hrvatskom nazivlju matematičkih pojmova. U MiŠ-u 41 je također obilježena ova obljetnica lijepim tekstom Dragice Golubić Matijević (str. 16–19), a kao fotozapis (str. 24 i 25) objavljene su preslike nekoliko stranice knjige. Evo marke izdane tom prigodom.

Godine 2011. Hrvatska pošta u zajednici s Vatikanskom poštanskom upravom izdala je poštansku marku s likom našeg velikog znanstvenika Ruđera Boškovića (1711. – 1787.).

Poštanske marke u matematici uistinu su prebogata i vrlo zanimljiva tema. Obilje je tu mogućnosti prirodnog povezivanja najrazličitijih elemenata i područja što je jedan od zahtjeva suvremene nastave. Vjerujem da ste uočili kako dobar broj predočenih maraka potječe iz malih zemalja, posebice afričkih (Gabon, Čad, Obala Bjelokosti, Gvineja Bisau, Džibuti). Zasigurno je riječ i o želji da se te zemlje afirmiraju i otvore svijetu.