

Neke dileme, paradoksi i zablude u vjerojatnosti

Danijel Krizmanić i
Valentino Skobljanec, Rijeka

U ovom članku prikazat ćemo nekoliko poznatih primjera i problema iz područja vjerojatnosti i teorije igara, konkretno "dilema zatvorenika", "paradoks dviju omotnica", "zabluda Monte Carlo" i "petrogradski paradoks".



Dilema zatvorenika

Dva su sumnjivca uhićena i pritvorena, te su oba izolirana i ne mogu komunicirati međusobno niti s vanjskim osobama. Tužitelj ima dokaze protiv obojice za manje prijestupe, te bi ih se moglo osuditi na zatvorsku kaznu od godinu dana. No on sumnja kako je par odgovoran i za neke veće prijestupe koji su se dogodili nedavno, no nema nikakvih konkretnih dokaza. Istovremeno, oba optuženika imaju ponudu tužitelja da svjedoče protiv onog drugog kako bi spasili sebe. Moguće su sljedeće opcije:

- Ako se **A** i **B** međusobno izdaju, oboje će služiti 2 godine u zatvoru.
- Ako zatvorenik **A** izda zatvorenika **B**, a **B** ostane nijem na ponudu tužiteljstva, zatvorenik **A** će biti oslobođen, dok će **B** služiti zatvorsku kaznu u trajanju od 3 godine (i obratno).

- Ako oba zatvorenika ostanu nijemi na ponudu tužiteljstva, bit će osuđeni za manje prijestupe, te će služiti samo po godinu dana u zatvoru.

S obzirom na to da optuženici imaju 2 izbora, ukupno dobivamo 4 moguća scenarija, tj. ishoda, koja smo gore opisali. Postavlja se pitanje koji je ishod najpovoljniji za pojedinog pritvorenika, odnosno što bi mu bilo najbolje učiniti u ovoj situaciji: ostati nijem na ponudu tužiteljstva ili izdati svog kolegu. Konačan rezultat, odnosno trajanje zatvorske kazne za pojedinog pritvorenika, ovisi i o odluci drugog pritvorenika. Kada bi pritvorenik znao kako je kolega odlučio ostati odan, tada bi između odanosti i izdaje povoljnije bilo izabrati izdaju, jer bi u slučaju izdaje bio odmah oslobođen naspram jedne godine zatvora u slučaju odanosti. U drugom pak slučaju, ako je kolega odlučio izdati ga, povoljnije bi opet bilo izdati ga, jer u tom slučaju će služiti kaznu dvije godine (nasuprot tri godine ako ga ne izda). Te sve situacije, s obzirom na dužinu zatvorske kazne za svakog zatvorenika možemo bolje

doc. dr. sc. Danijel Krizmanić, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, dkrizmanic@math.uniri.hr
Valentino Skobljanec, student na diplomskom studiju Diskretna matematika i primjene, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, vskobljanec@student.uniri.hr

uočiti u tablici 1:

Odluka	Izdaja	Odanost
Izdaja	2 / 2	0 / 3
Odanost	3 / 0	1 / 1

Tablica 1. Ishodi igre

Ako u ovoj tablici promatramo zbrojeve godina po ishodima, možemo vidjeti kako je zbroj najveći u slučaju njihove međusobne izdaje, dok je najmanji u slučaju njihove međusobne odanosti. To znači da bi najbolji ishod, ako gledamo obojicu zajedno, bio slučaj kada oboje ostanu odani. No ako stvar gledamo s pozicije jednog zatvorenika, njemu se najviše isplati izdati svog kolegu ("jer što god učinio kolega, ako ga izdam, dobit ću manju kaznu nego da sam bio odan"). Iako međusobna odanost rezultira najboljim zajedničkim ishodom (ukupno najmanja zatvorska kazna), takav ishod nije baš razumno očekivati zbog činjenice da odanost nije razumna s pozicije individue. Srž dileme, recimo to tako, je u tome da iako je u najboljem interesu obojice pojedinaca da surađuju i budu međusobno

odani, ipak je u interesu svakog pojedinca zasebno da izda onog drugog.

Znajući da nas je kolega izdao, nije mogući bolji vlastiti ishod od onoga u kojemu ga i mi izdajemo. Isto vrijedi i za našeg kolegu. Spomenuto stanje je stabilno stanje sustava koji uključuje više sudionika (u našem slučaju dva) u kojemu niti jedan sudionik ne može steći bolji vlastiti ishod mijenjanjem strategije, sve dok odluke ostalih sudionika ostaju nepromijenjene. To je jedini ishod igre za koji vrijedi *Nashov equilibrium*. John Nash¹ je za svoj rad vezan za ovu tematiku 1994. godine dobio Nobelovu nagradu iz ekonomije. Zanimljivo je kako je na veliko priznanje svoje teorije čekao 43 godine od objave članka.

Ako zamislimo da se nađemo u situaciji u kojoj smo uhićeni zajedno s jednim svojim prijateljem, svatko bi si od nas mogao postaviti pitanje: "Bih li ostao odan prijatelju ili bih ga ipak izdao (i time dobio manju kaznu)?" Na odgovor bi naravno utjecalo i naše uvjerenje o tome koliko nam je taj prijatelj zaista prijatelj, tj. koliko smo uvjereni da bi on nama ostao odan. U tom kontekstu su dva ekonomista sa Sveučilišta u Hamburgu provela istraživanje. Oni su testirali grupu studenata i zatvorenika, kako bi na koncu usporedili njihove rezultate. Test nisu temeljili na godinama zatvora, već su koristili novac kod studenata i ekvivalentnu vrijednost kave ili cigareta kod zatvorenika. Dobili su da je 37 % studenata ostalo odano kolegi, dok se kod zatvorenika radilo o čak 56 % slučajeva odanosti.

Iako se samo okruženje ove dileme čini pomalo izoliranim, mnogo je primjera u ljudskoj interakciji, kao i u procesima među živim bićima u prirodi koja imaju istu problematiku i dilemu. Zato je dilema postala predmet proučavanja u raznim znanostima poput ekonomije, psihologije, sociologije i evolucijske biologije. Spomenimo ovdje kao primjer utrku u naoružanju između SAD-a i SSSR-a tijekom hladnog rata. Obje strane su imale izbor "naoružati se" ili "razoružati se". S pozicije svake strane pojedinačno bolja je opcija naoružati se, jer smanjivati količinu i kvalitetu svog oružja dok se druga strana naoružava znači doći u opasnu situaciju gubljenja



Slika 1. Dilema zatvorenika izvan zatvora (slika objavljena uz suglasnost nositelja autorskih prava)

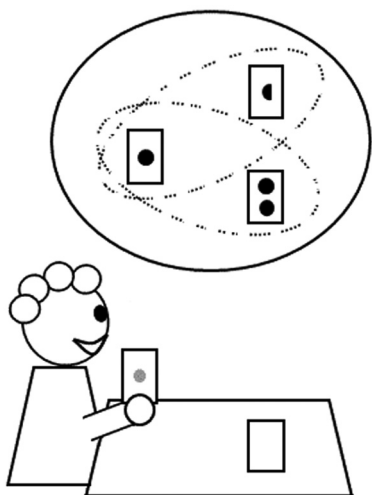
¹ Američki matematičar, poznat i po filmu "The Brilliant Mind" u kojemu ga utjelovljuje Russell Crowe.

budućeg međusobnog rata, a s druge strane naoružavati se dok se druga strana razoružava znači doći u superiorniju poziciju. Ako se obje strane naoružavaju, troše resurse na razvoj i održavanje oružja, a ne mogu si baš priuštiti da napadnu drugu stranu (obje strane imaju nuklearno naoružanje). Opcija koja bi bila najbolja za obje strane, gledane zajedno (kao i za cijeli svijet), je da se obje razoružaju. Tako ne bi došlo do međusobnog rata niti bi se trošili resursi na održavanje vojnog arsenala. Ono što se zaista dogodilo znamo, obje su strane ipak odlučile upustiti se u utrku vojnog naoružanja.

Paradoks dviju omotnica

Pretpostavimo da osobi pokažemo dvije zatvorene i identične omotnice. Znamo da se u omotnicama nalaze novci, i to u jednoj omotnici dvostruko veći novčani iznos nego u drugoj. Osoba izabere jednu omotnicu, nakon čega joj dajemo na izbor zamjenu omotnice. Koji bi trebao biti sljedeći potez? Zamijeniti ili ne zamijeniti? Je li svejedno?

Iako je naizgled jednostavno, jer smatramo da je izbor nebitan, kao izbor glave ili pisma kod bacanja simetričnog novčića, stvari se ubrzo kompliciraju. Omotnica koju smo izabrali sadrži x kuna. Stoga,



Slika 2. Što se nalazi u drugoj omotnici?

druga omotnica sadrži $2x$ kuna ili $\frac{x}{2}$ kuna, te su oba scenarija jednake vjerojatnosti. Ako naša omotnica sadrži manju vrijednost, zamjenom bismo dobili $2x$ kuna, te bismo zaradili x kuna. Ako pak naša omotnica sadrži veću vrijednost, zamjenom bismo dobili $\frac{x}{2}$ kuna, te bismo izgubili $\frac{x}{2}$ kuna.

Označimo sa X slučajnu varijablu koja predstavlja dobitak zamjenom omotnica. Razdioba od X je tada

$$X \sim \begin{pmatrix} x & -\frac{x}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Slijedi da je matematičko očekivanje dobitka zamjenom omotnica

$$EX = x \cdot \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{4} > 0.$$

Vidimo kako bismo, s obzirom na dobivenu pozitivnu vrijednost očekivanja, trebali zamijeniti omotnice. No, što ako nakon zamjene opet primijenimo isti princip? Tada ćemo se naći u beskonačnoj petlji zamjena omotnice u kojoj se nakon velikog broja zamjena očekuje velika dobit. To očito nije moguće te smo time otkrili paradoks.

Promotrimo sada naš problem na drukčiji način. Neka nam je ukupna vrijednost u omotnicama jednaka $3x$ kuna. Tada shodno našem izboru možemo dobiti $2x$ kuna ili x kuna. Ako naša omotnica sadrži manju vrijednost, x , tada zamjenom dobivamo x kuna više. Ako naša omotnica ipak sadrži veću vrijednost, tada gubimo x kuna. Označimo sa Y slučajnu varijablu dobitka zamjenom omotnica u ovako postavljenom modelu, pa imamo

$$Y \sim \begin{pmatrix} x & -x \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$EY = x \cdot \frac{1}{2} - x \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Iz ovog slijedi kako nemamo (matematičkog) razloga za zamjenu omotnice.

Primijetimo da u prvom modelu imamo tri vrijednosti u igri ($\frac{x}{2}$, x i $2x$), dok u drugom imamo samo dvije (x i $2x$), a toliko imamo i omotnica na raspolaganju. U prvom slučaju poteškoću stvara činjenica da sa x označavamo različite vrijednosti (i manji i veći iznos ovisno o omotnici koju smo izabrali). Ovdje smo se ograničili uglavnom samo na prikaz paradoksa, bez detaljnijeg razrješenja i objašnjenja. Članci i članci su napisani o tome, te se i dalje vode rasprave kako ispravno pristupiti tom problemu.

Zabluda Monte Carlo

Ako se nešto dogodi češće nego što je očekivano tijekom određenog razdoblja, dogodit će se rjeđe u bliskoj budućnosti (i obrnuto). Mišljenje je nastalo zbog pretpostavke za potrebom stabilizacije frekvencija. Već je francuski matematičar Laplace 1796. godine uočio gledalište kod nekih svojih muških suvremenika, čije su žene bile trudne, da veliki broj rođenih dječaka u okolini implicira kako će oni dobiti kćer. Slično se razmišljanje može vidjeti i kod nekih roditelja danas koji nakon nekoliko dobivenih djevojčica (ili dječaka) misle kako će idući put imati više šansi da dobiju dječaka (ili djevojčicu).

Takvo razmišljanje, u slučaju nezavisnih ponavljanja slučajnog pokusa, jest pogrešno. Ilustrirajmo to na jednom primjeru. Pretpostavimo da bacamo jednu simetričnu kocku, te da nas zanima događaj da na njoj padne paran broj. Vjerojatnost tog događaja je $\frac{1}{2}$ (od šest brojeva na kocki tri su povoljna za naš događaj, tj. brojevi 2, 4 i 6), a toliko iznosi i vjerojatnost događaja da padne neparan broj. Ako smo tu kocku bacili pet puta (ta bacanja su nezavisna jedno od drugoga) i svaki se put pojavio paran broj, možemo se pitati kolika će biti vjerojatnost da u idućem bacanju opet padne paran broj. Zagovaratelji gornjeg razmišljanja rekli bi kako će sada biti vjerojatnije da će pasti neparan broj, kako bi se "uravnotežila" slučajnost kocke. No to je pogrešno, jer u 6. bacanju kocke, što god se dogodilo tijekom prvih pet bacanja, šanse da padnu paran ili neparan broj su jednake ("kocka ne pamti svoju prošlost"). Pokažimo to. Označimo sa A

događaj da se u prvih pet bacanja kocke svaki put pojavio paran broj. Tada je vjerojatnost događaja A dana sa

$$P(A) = \frac{1}{2^5}.$$

Neka je B događaj da je u 6. bacanju kocke pao paran broj. Ono što želimo izračunati je $P(B|A)$, tj. uvjetnu vjerojatnost događaja B , uz uvjet da se dogodio događaj A , odnosno vjerojatnost da u 6. bacanju kocke padne paran broj ako je u prvih pet bacanja palo pet parnih brojeva. Po formuli za uvjetnu vjerojatnost imamo

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2^6}}{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{2}.$$

Najpoznatiji primjer ovakve zablude, po kojem je ona i dobila ime, dogodio se u jednom kasinu u Monte Carlu 1913. godine. Dogodilo se sljedeće. Kuglica na ruletu pala je na crna polja 26 puta zaredom. Kockari su tada izgubili milijune franaka kladeći se protiv crne boje, krivo smatrajući kako takav niz uzrokuje neravnotežu u slučajnosti ruleta, pa se u nastavku kuglica trebala zaustavljati češće na crvenim poljima.

Petrogradski paradoks

Ime je dobio po djelu Daniela Bernoullia "*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*" iz 1738. godine u kojem je on raspravljao o ovom problemu.

Zamislamo da kasino ima u ponudi igru bacanja simetričnog novčića pri kojoj igraču isplaćuje 2 kune ako se pismo pojavi u prvom bacanju novčića, 4 kune ako se pismo prvi put pojavi u drugom bacanju novčića, 8 za prvu pojavu pisma u trećem bacanju itd. Dakle, igrač osvaja 2^n kuna ako pismo padne prvi put u n -tom bacanju novčića. Pitamo se koliko velika bi trebala biti ulazna uplata igrača kako bi se garantirala pravedna igra. To se događa u slučaju kada je očekivani konačni dobitak igrača jednak

nuli, tj. kada su izjednačeni iznosi uplate igrača za sudjelovanje u igri i očekivane isplate za pobjedu u igri.

Izračunajmo vjerojatnost događaja da je pismo palo prvi put u n -tom bacanju novčića. Uočimo da su u tom događaju ishodi u svakom od n bacanja novčića točno određeni: u prvih $n - 1$ bacanja pale su glave, a u n -tom pismo. Kako je novčić simetričan, vjerojatnosti da padnu pismo, odnosno glava su jednake i iznose $\frac{1}{2}$, pa je vjerojatnost traženog događaja

$$P(\text{"pismo prvi put u } n\text{-tom bacanju"}) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{n \text{ puta}} = \frac{1}{2^n}.$$

Distribucija slučajne varijable isplate izgleda ovako:

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & \dots & 2^n & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{2^n} & \dots \end{pmatrix},$$

pa je očekivana vrijednost isplate igraču od strane kasina jednaka

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \dots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty.$$

Dakle, ako bismo htjeli da igra bude pravedna, igrač treba na početku uplatiti beskonačan iznos kuna kako bi ušao u igru. No bi li tko uplatio beskonačan iznos kako bi u konačnici zapravo dobio 2^n kuna za neki $n \in \mathbf{N}$? U tome leži paradoks. Gledajući samo ovaj rezultat, bilo koji konačan iznos uplate za ući u igru je prihvatljiv za igrača (jer bi u prosjeku bio na dobitku). No do kojeg iznosa bi svatko od nas bio spreman ići s tom uplatom?

LITERATURA

- 1/ N. Sarapa (1993.): *Vjerojatnost i statistika, I. dio: Osnove vjerojatnosti – kombinatorika*, Školska knjiga, Zagreb.
- 2/ V. Skobljanec (2015.): *Matematičko očekivanje i igre na sreću*, završni rad na preddiplomskom studiju matematike, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci.
- 3/ https://en.wikipedia.org/wiki/Prisoner%27s_dilemma
- 4/ https://en.wikipedia.org/wiki/Gambler%27s_fallacy
- 5/ <http://whatdoyaknow.com/ECON-class007-GameTheory.htm>

10. stručno-metodički skup, Pula 2017.

10. stručno-metodički skup - Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi održat će se od 10. do 12. studenoga 2017. u Puli (hotel "Park Plaza Histria"). Tema skupa: **Modeliranje i matematika**.

Na skup su pozvani svi učitelji matematike osnovnih škola, nastavnici matematike srednjih škola te sveučilišni profesori Republike Hrvatske i šire. Predavači i voditelji radionica bit će naši istaknuti sveučilišni profesori, učitelji i nastavnici te savjetnici Agencije za odgoj i obrazovanje. Na skupu će se raditi plenarno i u radionicama, bit će i okruglih stolova, izložbi i promocija. Skup se organizira u suradnji s Agencijom za odgoj i obrazovanje.

Pozivamo Vas da i na ovome jubilarnom, desetoj po redu, Skupu aktivno sudjelujete kao predavač i/ili voditelj radionice. Na skupu ćemo obilježiti 20 godina kontinuiranog rada Matematičkog društva "Istra", ranije HMD – podružnica Istra.

Više pročitajte na <http://md-istra.blogspot.hr/p/metodicki-skup-pula.html>.

Robert Gortan, prof.