Descartesov izgubljeni teorem

Marina Seifert, Zagreb

René Descartes (La Haye Touraine, 31. 3. 1596. – Stockholm, 11. 2. 1650.) poznati je francuski matematičar i fizičar, ali i prvi moderni filozof poznat po izreci *Cogito ergo sum* (*Mislim, dakle postojim*). U matematici je ponajprije poznat po Kartezijevu koordinatnom sustavu, koji je ime dobio po latiniziranom obliku njegova imena (lat. *Renatus Cartesius*), te kao utemeljitelj analitičke geometrije.

Život Renéa Descartesa

Descartes je rođen 1596. godine u manjem selu pored grada Toursa u Francuskoj. Školovao se na jezuitskom sveučilištu gdje je veliki utjecaj imala skolastička tradicija, dok su humanističke discipline i znanosti bile izostavljene. Najviše je zanimanja pokazivao za matematiku, što je ostavilo i velik trag u njegovoj filozofiji. Nakon završetka studija, s obzirom na to da je bio mladić iz ugledne obitelji, za izbor njegovog budućeg zanimanja postojala su samo dva izbora: vojska ili crkva. Descartes je odabrao vojsku, a svoje slobodno vrijeme provodio je baveći se matematičkim problemima i filozofijom. Nakon izlaska iz vojske pretežito je boravio u Parizu i djelovao u krugu matematičara i fizičara okupljenih oko Mersennea[1], da bi se 1629. preselio u Nizozemsku gdje je dvadeset godina vodio miran život potpuno posvećen matematici, fizici i filozofiji. U to vrijeme pisao je radove o optici, meteorologiji i geometriji, te zasnovao analitičku geometriju primjenjujući geometrijske metode za rješavanje algebarskih problema, i obratno. Većina njegovih ranijih filozofskih tekstova je izgubljena, a prvi značajniji izdan je 1637. godine pod naslovom *Discours de la méthode*. Godine 1649. na poziv švedske kraljice napustio je Nizozemsku kako bi postao njezin učitelj, ali je oštra skandinavska klima narušila njegovo krhko zdravlje te je umro sljedeće godine.

Slika 1. René Descartes

Djela i doprinosi

Descartesovi doprinosi u matematici, fizici i filozofiji su iznimno značajni. U svom najpoznatijem djelu *Discours de la méthode* iznosi kritiku dotadašnje filozofske i znanstvene misli, te ukazuje na potrebu revizije pojmova i metoda kojima su se gradi-

Marina Seifert, studentica diplomskog sveučilišnog studija Matematika, nastavnički smjer, 2. godina, `marinaseifert@hotmail.com`

[1] Mersenne, Marin (Oizé, 8. 9. 1588. – Pariz, 1. 9. 1648.), francuski matematičar, fizičar, filozof i glazbeni teoretičar. Njegovu znanstvenom krugu pripadali su Descartes, Fermat, Pascal i mnogi drugi, a poznat je po brojevima oblika 2n – 1, tzv. Mersenneovim brojevima.

le znanstvene teorije. Osnova spoznaje treba biti mogućnost čovjeka da svojim umom donosi red u proučavanje stvari te onda pravilno zaključuje. *Principia Philosophiae* je najobimnije Descartesovo djelo, objavljeno u Amsterdamu 1644. Sastoji se od četiriju dijelova: *Principi ljudskog znanja*, *Principi materijalnih stvari*, *O vidljivom svijetu* te *Zemlja*. Tim djelom Descartes želi cijeli svemir svesti na matematičke i mehaničke temelje. Kao fizičar Descartes se isticao svojim radovima iz optike i mehanike. U suradnji s Nizozemcem Willebrordom Snelliusom oblikovao je zakon loma svjetlosti; proučavao je i lom svjetlosti u unutrašnjosti vodene kapljice i objasnio nastanak duge. Osim toga, Descartes je dao niz važnih poučaka i metoda iz različitih područja matematike. Svojim djelom *La Géometrie* (prilogom *Discours de la méthode*) Descartes otvara novo razdoblje u razvoju matematike uvođenjem pravokutnog koordinatnoga sustava i međusobno zavisnih promjenljivih veličina, čime je uspostavljena veza između algebre i geometrije i zasnovana analitička geometrija, koja će poslije biti temelj za razvoj diferencijalnog i integralnoga računa. To je bila sasvim nova zamisao opisivanja položaja točke ili objekta u ravnini navođenjem koordinata. Kružnice, elipse i ostale krivulje sada su se mogle opisivati algebarskim jednadžbama uz pomoć koordinata točaka. Descartes je smatrao da se svaki geometrijski problem može svesti na algebarski jezik, a potom riješiti sredstvima analitičke geometrije. U tom se djelu također kao oznake uvode slova s početka abecede za poznate veličine, a s kraja za nepoznanice. Tako Descartes uvodi danas uobičajeni način označavanja u algebri. Imao je također predodžbu o realnom broju blisku današnjoj, a proučavao je i algebarske jednadžbe. Manje poznati od rezultata o analitičkoj geometriji, ali također bitni, su i Descartesovi rezultati iz teorije brojeva.

Descartesov izgubljeni teorem i poliedri

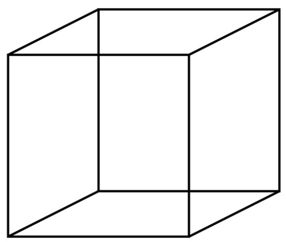
Nakon njegove iznenadne smrti 1650. u Stockholmu, sakupljeni su svi Descartesovi rukopisi i potom doneseni u Pariz. Među tim rukopisima nalazio se i takozvani Descartesov izgubljeni teorem, koji se pojavljuje u njegovoj raspravi o poliedrima pod nazivom *Progymnasmata de Solidorum Elementis*. Njegova saznanja o poliedrima nisu bila poznata javnosti sve do 1860. godine. Tada su među Leibnizovim papirima pronašli kopiju, odnosno prijepis, Descartesove rasprave i njegova teorema. Poliedar je geometrijsko tijelo omeđeno mnogokutima. Svaki poliedar ima određeni broj vrhova (V), bridova (B) i strana (S). Brojeve V, B i S za konveksne[2] poliedre povezuje jednostavne relacija $V+B-S=2$. Navedenu formulu otkrio je švicarski matematičar Leonhard Euler 1752. godine, tražeći prostorni analogon izraza $(n-2)\pi$ za zbroj kutova n-terokuta. Po njemu se ona danas naziva Eulerovom formulom za poliedre. No, formulu je poznavao već Descartes 1620. godine, što je upravo otkriveno u njegovoj neobjavljenoj raspravi i u njegovom izgubljenom teoremu. Iz tog razloga se ta formula ponekad u matematičkim knjigama može naći i pod nazivom Descartes-Eulerova formula za poliedre.

Kutni defekt

Kutni defekt definiramo u vrhu poliedra kao razliku punog kuta i zbroja kutova na stranama poliedra pri vrhu u kojem se one spajaju. Na primjer, kutni defekt kocke je

$$360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 90^\circ$$

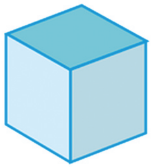
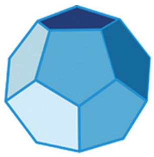
jer se u jednom vrhu spajaju tri strane kocke, a kut na svakoj strani kocke pri vrhu jest 90°.



Slika 2. Kocka

Totalni ili ukupni kutni defekt poliedra je zbroj svih kutnih defekata u svim vrhovima poliedra. Na primjeru kocke to je $8 \cdot 90^\circ = 720^\circ$ jer kocka ukupno

[2] Poliedar je konveksan ukoliko svaka dužina koja spaja njegove dvije proizvoljne točke pripada tom poliedru.

pravilni poliedar	broj vrhova V	kutni defekt	ukupni kutni defekt T
 tetraedar	4	180°	720°
 heksaedar	8	90°	720°
 oktaedar	6	120°	720°
 dodekaedar	20	36°	720°
 ikosaedar	12	60°	720°

Tablica 1. Pravilni poliedri

ima 8 vrhova, a u svakom vrhu kutni defekt je $90°$. Ukupni kutni defekt označavamo velikim slovom T. Ako promotrimo ukupni kutni defekt za pravilne poliedre (tablica 1.), kod kojih je kutni defekt u svakom vrhu jednak, možemo uočiti da je on za sve jednak $720°$, odnosno 4π.

Logično je da se sada zapitamo zbog čega se čini da je ukupni defekt uvijek jednak $720°$. Descartes je prvi uočio vezu između ukupnog kutnog defekta (T) te broja bridova (B), vrhova (V) i strana (S) konveksnog poliedra. Preciznije rečeno, uočio je vezu između kutnog defekta i spomenute formule $V+B-S=2$, što je i obznanio u svojoj raspravi o poliedrima. U njoj je iskazan Descartesov izgubljeni teorem koji govori da je ukupni kutni defekt poliedra jednak umnošku punog kuta ($360°$ ili 2π) i broja $V+B-S$, odnosno da vrijedi

$$T = 2\pi \cdot (V+B-S),$$

ili izraženo u stupnjevima

$$T = 360° \cdot (V+B-S).$$

Posebno, za konveksne poliedre broj $V+B-S$ je uvijek jednak broju 2, pa stoga za njih vrijedi da je ukupni kutni defekt uvijek $720°$ ili 4π. Zanimljivo je da je Descartes to znao otprilike 100 godina prije nego što je Euler otkrio i dokazao po njemu nazvanu formulu. Eulerova formula za konveksne poliedre je ekvivalentna Descartesovu izgubljenu teoremu, ali metode kojima su Euler i Descartes došli do svojih zaključaka su bitno različite. Također, Euler je rođen 57 godina nakon Descartesove smrti, a umro je 77 godina prije otkrića Descartesova teorema pa Descartes nije imao utjecaja na Eulerovu spoznaju. Važnost Descartesova izgubljenog teorema, odnosno Eulerove formule, leži i u povijesnoj činjenici da je on u izvjesnom smislu bio prvi veliki teorem nove matematičke discipline – topologije.

Dokaz teorema

Prema definiciji kutnog defekta u jednom vrhu (Δ) vrijedi:

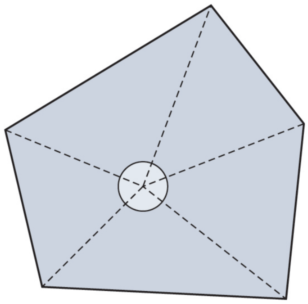
$\Delta = 360° -$ zbroj kutova na stranama poliedra koji se sastaju u vrhu poliedra.

Ako zbrojimo sve kutne defekte u svim vrhovima poliedra, dobit ćemo ukupni kutni defekt.

$T = 360° \cdot V -$ zbroj kutova na stranama poliedra koji se sastaju u svim vrhovima poliedra.

Sa slike 3 možemo uočiti:

zbroj kutova jedne strane poliedra $= 180°\cdot$ broj bridova jedne strane poliedra $-360°$.



Slika 3. Peterokut

Zbrojimo li kutove na svim stranama, dobijemo:

zbroj kutova na svim stranama poliedra $= 180°\cdot$ ukupan broj bridova na svim stranama poliedra $-360°\cdot S$.

Uzimajući u obzir da je svaki brid zajednički dvjema stranama poliedra, prethodnu jednakost možemo zapisati kao

zbroj kutova na svim stranama poliedra $= 180°\cdot 2 - 360°\cdot S$.

Zbroj svih kutova na stranama poliedra koji se sastaju u vrhovima poliedra je jednak zbroju kutova na svim stranama poliedra pa ukupni kutni defekt možemo zapisati kao

$$T = 360°\cdot V - 180°\cdot 2B - 360°\cdot S,$$

odnosno

$$T = 360°\cdot (V - B + S).$$

Uočimo da je $T = 720°$ ako i samo ako je $V - B + S = 2$, čime automatski vidimo vezu između Descartesova teorema i Eulerove formule za konveksne poliedre.

Posljedice Descartesova izgubljenog teorema

Iz Descartesova teorema možemo izvesti još neke zanimljive, ali i korisne zaključke. Njime možemo vrlo lako i brzo odrediti broj vrhova svakog pravilnog i polupravilnog poliedra. Recimo, ako želimo izračunati broj vrhova nogometne lopte, to možemo izračunati koristeći se Descartesovim teoremom. Klasična nogometna lopta je oblika napuhanog krnjeg ikosaedra, koji pripada polupravilnim poliedrima. To su konveksni poliedri čiji su svi vrhovi međusobno ekvivalentni (jednako izgledaju), a sve strane pravilni mnogokuti, ne nužno međusobno sukladni.

Slika 4. Nogometna lopta

Krnji ikosaedar čini 12 peterokuta i 20 šesterokuta, a u svakom njegovom vrhu sastaju se po dva šesterokuta i jedan peterokut. S obzirom na to da je ukupni kutni defekt za svaki konveksni poliedar jednak $720°$ i da znamo da ga možemo izračunati tako da pomnožimo broj vrhova poliedra (V) s kutnim defektom u jednom vrhu (Δ) vrijedi $V = 720° : \Delta$. Kutni defekt Δ za krnji ikosaedar je $360° - 120° - 120° - 108° = 12°$. Prema tome, broj vrhova krnjeg ikosaedra, odnosno nogometne lopte, je $V = 720° : 12° = 60$.

LITERATURA

1/ C. Alsina (2010.): *Charming Proofs: A Journey Into Elegant Mathematics*, MAA.

2/ F. M. Brueckler (2004.): *René Descartes*, Osječka matematička škola 4.

3/ Z. Kurnik (2000.): *René Descartes*, MiŠ, broj 6.

4/ `http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ743583.pdf`

5/ `http://bact.mathcircles.org/files/Summer2013/PowerPoint_AngleDefectAndWallpaperSymmetry20130617.pdf`

6/ `http://mathworld.wolfram.com/AngularDefect.html`

7/ `http://mathworld.wolfram.com/DescartesTotalAngularDefect.html`

8/ `http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?id=14710`