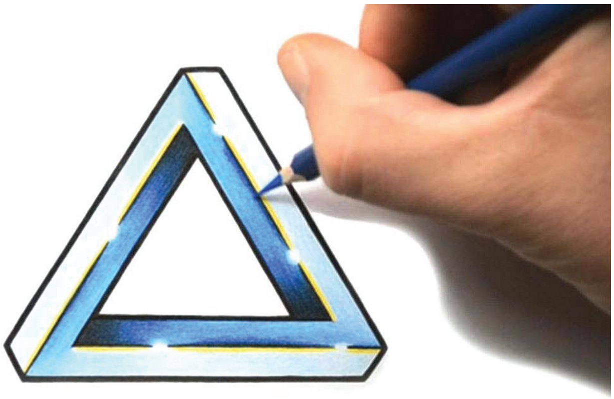
Više raznih rješenja

jednog zadatka iz geometrije

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH
Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska



In memoriam dragom kolegi i prijatelju
Anđelku Mariću (1939. – 2016.)

U ovom ćemo radu dati četiri razna rješenja jednog zadatka iz geometrije u vezi trokuta i to dva čisto planimetrijska te po jedno rješenje s pomoću vektora i analitičke geometrije. Mišljenja smo da su ovakvi radovi iz matematike vrlo značajni i zanimljivi za one učenike (pa i studente) koji pokazuju veći interes za matematiku, kao i za nastavnike koji rade s takvim učenicima. Parafrazirao bih ovdje jednog uglednog engleskog metodičara nastave matematike (W. W. Sawyer, 1911. – 2008., *Prelude to Mathematics*) koji je rekao da je vrednije riješiti jedan zadatak na dva ili više načina, nego desetine zadataka na jedan te isti način.

Riječ je o sljedećem zadatku:

U jednakokračnom trokutu ABC $|AB| = |AC|$, *točka* D *je polovište osnovice* $\overline{BC}$, *a točka* E *je nožište okomice iz točke* D *na krak* $\overline{AC}$. *Točka* F *je polovište* $\overline{DE}$. *Dokaži da su pravci* BE *i* AF *međusobno okomiti.*

Rješenje 1. Ako je točka G polovište dužine $\overline{CE}$, tada je dužina $\overline{FG}$ srednjica trokuta DCE, te je $\overline{FG} \parallel \overline{DC}$ (slika 1), pa je $\overline{FG} \perp \overline{AD}$. Dužina $\overline{DG}$ je srednjica trokuta BCE, te je $\overline{DG} \parallel \overline{BE}$. U trokutu ADG pravci DE i GF su pravci na kojima leže visine tog trokuta pa je točka F njihov ortocentar, što znači da treća visina trokuta ADG, povučena iz vrha A, leži na pravcu AF. Prema tome, slijedi da je $AF \perp DG$, odnosno zbog $\overline{DG} \parallel \overline{BE}$: $AF \perp BE$. ■

Rješenje 2. Neka je M presječna točka dužina $\overline{AF}$ i $\overline{BE}$. Da bismo dokazali da je kut $\sphericalangle AMB$ pravi, potrebno je dokazati da je četverokut $ABDM$ tetivni (slika 1), tj. da vrijedi $\sphericalangle DAM = \sphericalangle DBM$.

Budući da je $\overline{DE} \perp \overline{AC}$, tj. $\overline{DF} \perp \overline{AC}$ i $\overline{DC} \perp \overline{AD}$, slijedi da je $\sphericalangle ADF = \sphericalangle DCE$ (kutovi s okomitim kracima). Dokazat ćemo sada da su trokuti ADF i BCE slični.

prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, asefket@pmf.unsa.ba
Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

Dokazat ćemo najprije da vrijedi jednakost:

$$\frac{|DF|}{|AD|}=\frac{|EC|}{|BC|},$$

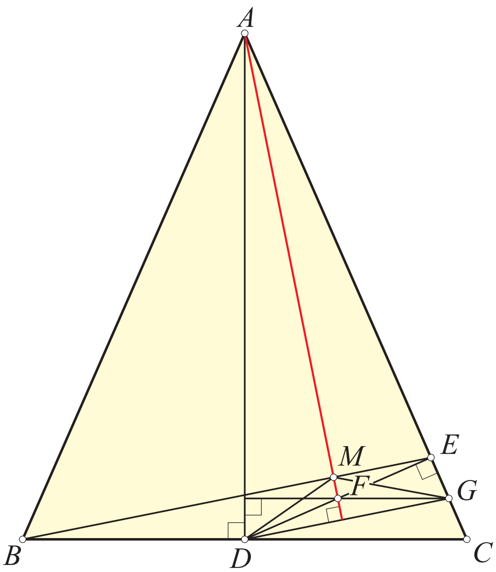
odnosno zbog $|DF|=\frac{1}{2}|DE|$ i $|BC|=2|DC|$:

$$\frac{|DE|}{2|AD|}=\frac{|EC|}{2|DC|},\quad \text{tj.}\quad \frac{|DE|}{|AD|}=\frac{|EC|}{|DC|}.$$

Ova jednakost slijedi iz činjenice da je trokut ADC pravokutni trokut čija je visina na hipotenuzu dužina $\overline{DE}$ pa su trokuti ADE i CDE slični, odakle slijedi gornja jednakost. Dakle, dokazali smo da vrijedi: $\sphericalangle ADF=\sphericalangle DCE=\sphericalangle BCE$ te $\frac{|DF|}{|AD|}=\frac{|EC|}{|BC|}$, što znači da je $\triangle ADF\sim\triangle BCE$.

Odavde slijedi da je $\sphericalangle DAF=\sphericalangle CBE$, tj. $\sphericalangle DAM=\sphericalangle DBM$, što znači da je četverokut $ABDM$ tetivni. Budući da je $\sphericalangle BDA$ pravi kut, iz obrata Talesova teorema slijedi da je $\overline{AB}$ promjer kružnice opisane oko $ABDM$ pa je i kut $\sphericalangle BMA$ pravi, tj. $AM\perp BE$ ili $AF\perp BE$. ■

Rješenje 3. Označimo $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$; tada je $\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\lambda\,\vec{b}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=b$, $(\vec{a},\vec{b})=\varphi$ (slika 1).



Slika 1.

Izrazimo vektore $\overrightarrow{BE}$ i $\overrightarrow{AE}$ s pomoću $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Imamo

$$\overrightarrow{BE}=-\vec{a}+\lambda\vec{b},\qquad \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}),$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\lambda\vec{b}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left[\vec{a}+(1+2\lambda)\vec{b}\right].$$

Dalje je:

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\lambda\vec{b}$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\vec{a}+(1-2\lambda)\vec{b}\right].$$

Budući da je $\overline{DE}$ okomito na $\overline{AC}$, slijedi da je $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, odnosno $-\frac{1}{2}\left[\vec{a}+(1-2\lambda)\vec{b}\right]\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-2\lambda)b^2=0$, te

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi+(1-2\lambda)b^2=0$$
$$\Longrightarrow b^2\cos\varphi+(1-2\lambda)b^2=0\ /:(b^2\neq 0)$$
$$\Longrightarrow \cos\varphi+1-2\lambda=0$$
$$\Longrightarrow \cos\varphi=2\lambda-1. \tag{1}$$

Dovoljno je sada dokazati da je $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AF}=0$ ili $(-\vec{a}+\lambda\vec{b})\left[\vec{a}+(1+2\lambda)\,\overrightarrow{b}\right]=0$.

Imamo dalje:

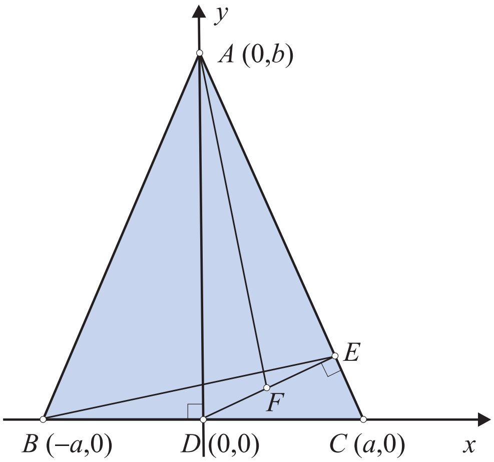
$$(-\vec{a}+\lambda\vec{b})\left[\vec{a}+(1+2\lambda)\vec{b}\right]$$
$$=-a^2+\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}-(1+2\lambda)\,\overrightarrow{a}\cdot\vec{b}+\lambda(1+2\lambda)b^2$$
$$=-b^2+(\lambda-1-2\lambda)b^2\cos\varphi+(\lambda+2\lambda^2)b^2$$
$$=b^2\left[(2\lambda^2+\lambda-1)-(\lambda+1)\cos\varphi\right]. \tag{2}$$

Stavljajući u (2) izraz za $\cos\varphi$ iz (1), dobivamo:

$$(-\vec{a}+\lambda\vec{b})\left[\vec{a}+(1+2\lambda)\vec{b}\right]$$
$$=a^2\left[(2\lambda^2+\lambda-1)-(\lambda+1)(2\lambda-1)\right]=0$$

pa je $AF\perp BE$. ■

Rješenje 4. Koristit ćemo se ovdje analitičkom geometrijom. Neka je $BC \equiv OX, AD \equiv OY, D(0,0)$, $A(0,b)$, $B(-a,0)$, $C(a,0)$; $(a>0, b>0)$ (slika 2).



Slika 2.

Iz jednadžbe pravca AC: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ očitavamo koeficijent smjera $k_{AC}=-\frac{b}{a}$ te zbog $DE \perp AC$: jednadžba pravca DE je $y=\frac{a}{b}x$.

Kako je $\{E\}=DE \cap AC$, dobivamo koordinate točke E:

$$E\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right),$$

kao i

$$F\left(\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}, \frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}\right).$$

Dalje dobivamo:

$$k_{AF}=\frac{\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}-b}{\frac{ab^2}{2(a^2+b^2)}-0}=-\frac{a^2+2b^2}{ab},$$

$$k_{BE}=\frac{\frac{a^2b}{a^2+b^2}-0}{\frac{ab^2}{a^2+b^2}+a}=\frac{ab}{a^2+2b^2},$$

a odavde je očito da vrijedi $k_{AF}=\frac{-1}{k_{BE}}$, tj. pravac AF okomit je na BE. ■

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić (2005.): *Matematika za nadarene*, (2. izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo.

2/ Š. Arslanagić (2006.): *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo.