Izrada alata u *GeoGebri* i kombinatorni zadatci

Maja Starčević, Zagreb

Znanje o konstrukcijama geometrijskih likova stečeno na nastavi matematike učenici mogu primijeniti pri izradi alata za crtanje likova u nekom od programa dinamične geometrije. Izrađeni alati mogu im pomoći i u vizualizaciji pri rješavanju kombinatornih zadataka različitih težina.

Izradom alata u nekom od programa dinamične geometrije i njihovom primjenom uvodimo kreativniji pristup u nastavu geometrije. Tako postavljeni problemi su kompleksniji. Oni kao prvo zahtjevaju predznanje o konstrukcijama raznih likova kako bismo uopće mogli pristupiti izradi alata. Nakon što se konstruira zadani lik, potrebno je prepoznati koji su objekti konstrukcije ulazni, odnosno o kojim objektima ovisi čitava konstrukcija, te koji su objekti izlazni, tj. objekti dobiveni konstrukcijom koji u potpunosti ovise o ulaznim objektima i koje alat treba iscrtati. Primjenjujući neke alate, npr. one kod kojih imamo po dvije ulazne točke čija udaljenost nije konstantna, može se uočiti da oblik dobivenih likova ostaje isti, ali im se mjere proporcionalno mijenjaju. Tada s pomoću alata ne crtamo sukladne, već međusobno slične likove. Ako zadajemo uvjete na dimenzije likova koje želimo nacrtati s pomoću alata, potrebno je stoga i predznanje o sličnosti likova.

U ovom ćemo radu proučiti kako alate možemo iskoristiti u popločivanju nekog zadanog lika, odnosno kakve bismo vrste zadataka mogli sastaviti u tom kontekstu, bilo u redovnoj ili dodatnoj nastavi. Jedan od pristupa je da učenicima damo slobodu u odluci koje će alate i koliko njih koristiti, kao i način na koji će ih koristiti. Drugi pristup je zadati im dodatne uvjete i na taj način podići težinu zadatka u geometrijskom i/ili kombinatornom smislu. Učenici takve zadatke mogu riješiti metodom pokušaja i pogrešaka. Ako zaključe da neće uspjeti popločiti zadani lik, mogu se npr. vratiti na početak i pokušati popločivati na neki drugi način. Ponekad će neki učenici shvatiti da su pogriješili u nekom konkretnom koraku te ipak iskoristiti dio poteza koji su napravili, odnosno poništit će samo nekoliko posljednjih poteza ili neki drugi skup poteza za koje primijete da ne vode do rješenja. Kod nekih zadataka će neka skupina učenika, analizirajući zadano, sastaviti unaprijed potpunu strategiju rješavanja te

doc. dr. sc. Maja Starčević, Zavod za primijenjenu matematiku, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, `mstarcev@math.hr`

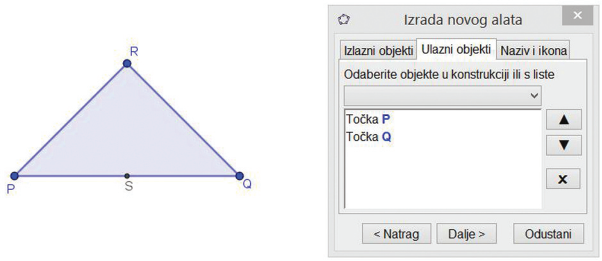
zatim otprve popločiti zadani lik.

Zadatci se mogu postavljati tako da dobijemo zadatke vrlo različitih težina, od vrlo jednostavnih zadataka do onih težih koji zahtjevaju kombinatorne dokaze. Stoga su neki od njih primjereniji redovnoj, a drugi dodatnoj nastavi.

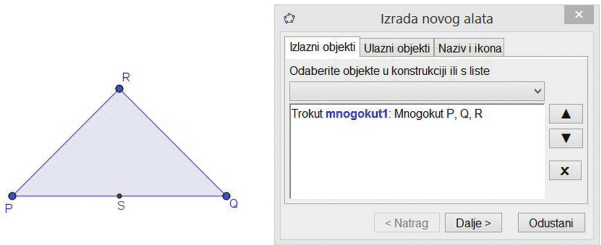
Izrada alata

Pogledat ćemo jedan konkretan primjer. Napravit ćemo alate "Trokut" i "Trapez" u GeoGebri. Alat "Trokut" za zadane dvije točke crta jednakokračan pravokutan trokut kojem su zadane točke krajnje točke hipotenuze. S druge strane, alat "Trapez" za zadane dvije točke crta jednakokračan trapez kojem je jedna osnovica tri puta dulja od druge osnovice i od visine trapeza. Zadane točke su vrhovi trapeza koji pripadaju duljoj osnovici.

Opišimo izradu alata. Prvo ćemo napraviti alat "Trokut". Za zadane dvije točke P i Q odredimo polovište S dužine $\overline{PQ}$ te rotiramo Q oko S za 90° u pozitivnom smjeru. Dobivena je točka R te konstruiramo trokut PQR. Sada pod stavkom izbornika "Alati" odaberemo podstavku "Izrada novog alata". U dobivenom okviru za ulazne objekte odaberemo



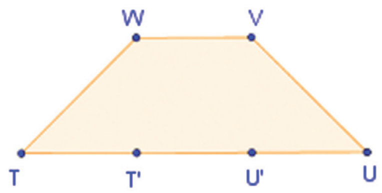
Slika 1.



Slika 2.

zadane točke P i Q (slika 1), a za izlazni objekt trokut PQR (slika 2). Nakon što upišemo ime alata i potvrdimo, dobit ćemo poruku da je alat uspješno izrađen. U alatnoj traci pojavit će se ikona koja pripada upravo izrađenom alatu. Odabirom te ikone i dviju točaka na plohi crtanja nacrtat će se traženi trokut.

Slično, za zadane točke T i U odredimo točke T' i U' koje dijele dužinu $\overline{TU}$ na tri jednaka dijela (slika 3). Rotiramo T oko T' za 90° u negativnom smjeru i dobivamo točku W. Rotiramo U oko U' za 90° u pozitivnom smjeru i dobivamo točku V. Sada su nam za alat "Trapez" ulazni objekti točke T i U, a izlazni objekt je dobiveni trapez $TUVW$.



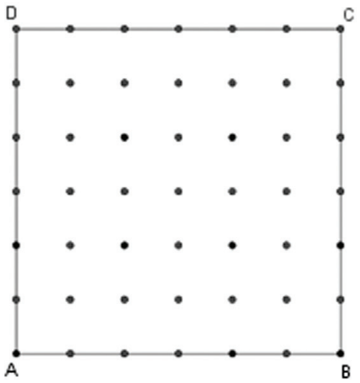
Slika 3.

Trokut i trapez ćemo obojiti različitim bojama i istaknuti im stranice tako da ih možemo razlikovati na slici.

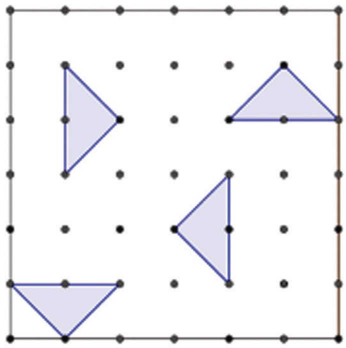
Popločivanje zadanog lika

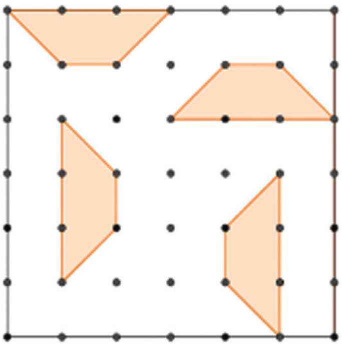
U nastavku ćemo se konstruiranim alatima koristiti za popločivanje kvadrata $ABCD$ stranice duljine 6 cm. Pod popločivanjem podrazumijevamo potpuno prekrivanje kvadrata $ABCD$ likovima koje možemo dobiti s pomoću izrađenih alata, pri čemu nema preklapanja likova. Uvest ćemo osnovna pravila popločivanja. Ona glase:

a) Svi trokuti moraju imati hipotenuzu duljine 2 cm.
b) Kraća stranica trapeza mora uvijek imati duljinu 1 cm.
c) Sve hipotenuze trokuta moraju biti paralelne s jednom od stranica kvadrata $ABCD$.
d) Sve osnovice trapeza moraju biti paralelne s jednom od stranica kvadrata $ABCD$.



Slika 4.


Slika 5.


Slika 6.

Očito je da će zbog prethodnih pravila svi trokuti i trapezi imati vrhove u točkama koje su prikazane na mreži na slici 4, gdje je udaljenost svih susjednih čvorova jednaka 1 cm. Također, primjećujemo da svi trokuti kojima se koristimo u popločivanju imaju jednake dimenzije, te da isto vrijedi i za trapeze. Na slici 5 i slici 6 vidimo sve načine kako se možemo koristiti ovim dvama alatima uz prethodno postavljene uvjete.

Kombinatorni zadatci

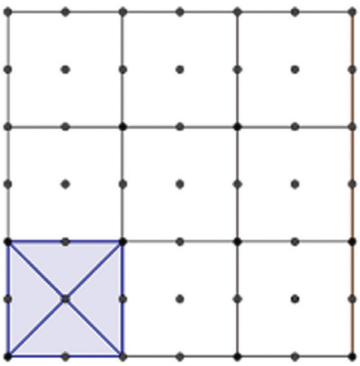
U zadatcima koji slijede zadajemo dodatne uvjete na popločivanje. Za početak ćemo riješiti dva jednostavnija zadatka metodom ponavljanja uzorka.

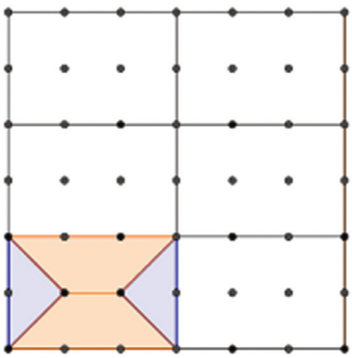
Zadatak 1. *Popločite kvadrat $ABCD$ tako da se koristite samo trokutima.*

Rješenje: Zadatak je lako riješiti ako prepoznamo uzorak u popločivanju koji se može ponavljati. Konkretno primijetimo da kvadrat $ABCD$ možemo podijeliti na devet kvadrata sa stranicom duljine 2 cm kao na slici 7. Pritom kvadrat u donjem lijevom kutu popločimo kao što je prikazano na slici, a ostale kvadrate popločimo na isti način.

Zadatak 2. *Popločite kvadrat $ABCD$ tako da se koristite jednakim brojem trapeza i trokuta.*

Rješenje: Uočimo da se pravokutnik duljina stranica 3 cm i 2 cm može popločiti dvama trapezima i dvama trokutima, kao na slici 8. Drugim riječima, taj smo pravokutnik popločili jednakim brojem trokuta i trapeza. Zadani kvadrat $ABCD$ možemo rastaviti na šest pravokutnika istih dimenzija. Ako svaki od


Slika 7.


Slika 8.

njih popločimo na prethodno opisani način, ukupan broj korištenih trokuta bit će jednak broju trapeza.

Prepoznate uzorke iskoristit ćemo i u sljedećem zadatku koji zahtijeva dodatni račun.

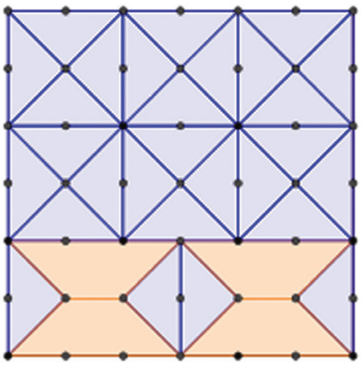
Zadatak 3. *Popločite kvadrat $ABCD$ s pomoću trapeza i trokuta tako da iskoristite sedam puta više trokuta nego trapeza.*

Rješenje: Odredimo prvo broj trokuta i trapeza koje treba iskoristiti. Neka je x broj trapeza. Tada je $7x$ broj trokuta. Površina kvadrata je 36 cm^2, površina svakog trokuta jednaka je 1 cm^2, a površina svakog trapeza je 2 cm^2. Dakle, vrijedi $7x \cdot 1 + x \cdot 2 = 36$, odnosno $x = 4$ pa moramo iskoristiti 4 trapeza i 28 trokuta. Nadalje, primijetimo da se možemo koristiti uzorcima iz prethodna dva zadatka pa ploču možemo popločiti npr. kao na slici 9. Lako je vidjeti da drukčijim razmještajem uzoraka dobivamo još neka rješenja (npr. slika 10).

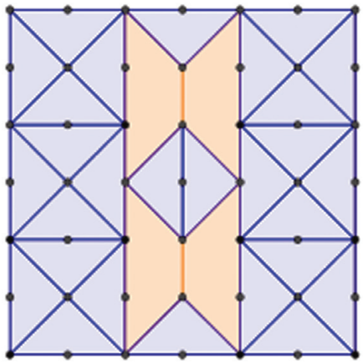
U prethodnim zadatcima bilo je dovoljno naći jedno rješenje zadatka. Zadatak može postati složeniji ako tražimo dokaz da neko popločivanje ne postoji. Jedan od načina dokazivanja takve tvrdnje je da pokušamo popločiti zadani lik od mjesta gdje imamo samo jednu opciju za popločivanje (ili jako malo njih). Pogledajmo to na sljedećem primjeru.

Zadatak 4. Dokažite da nije moguće popločiti kvadrat $ABCD$ samo s pomoću trapeza.

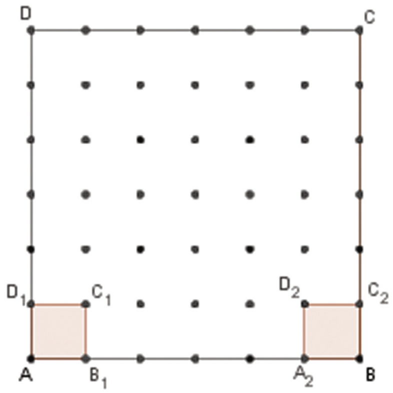
Rješenje: Pogledajmo za početak kako popločiti kvadrat $AB_1C_1D_1$ duljine stranice 1 cm (slika 11). Očito je da se on ne može prekriti samo jednim trapezom, odnosno da je za njegovo popločivanje potrebno iskoristiti dva trapeza i da je to prekriva-



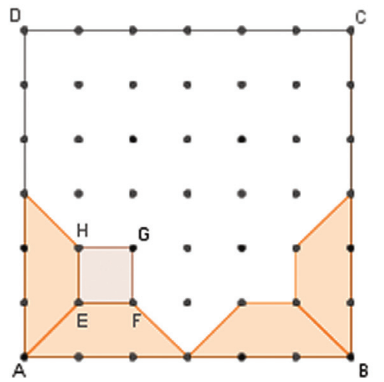
Slika 9.



Slika 10.

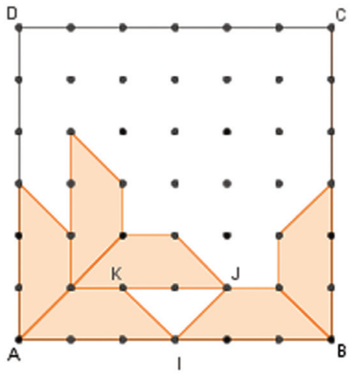


Slika 11.



Slika 12.

nje moguće napraviti samo na jedan način (slika 12). Analogno dolazimo do zaključka kako prekriti kvadrat $A_2BC_2D_2$ (slika 11). Rješenje opet vidimo na slici 12. Na isti način zaključujemo kako prekriti kvadrat $EFGH$ (slika 12) i vidimo da imamo samo jedno moguće rješenje, kao na slici 13. Time smo dobili jedan nepokriven trokut IJK kojeg je nemoguće prekriti trapezom. Dakle, zadano popločivanje ne postoji.



Slika 13.

U zadatku 3 smo vidjeli da možemo imati i više rješenja. Još jedan izazov u zadatku može biti da odredimo baš sva popločivanja sa zadanim svojstvima.

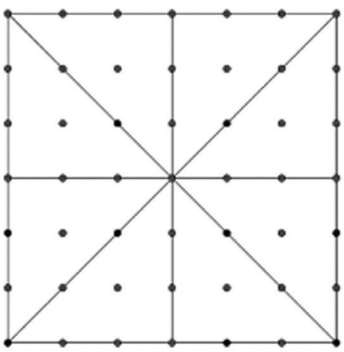
Zadatak 5. *Na koliko načina možemo popločiti kvadrat $ABCD$ trokutima i trapezima, koristeći se barem jednim trapezom, tako da dobivena slika na kvadratu bude simetrična s obzirom na obje dijagonale kvadrata i na dužine koje spajaju polovišta nasuprotnih stranica kvadrata?*

Rješenje: Za početak, ključno je primijetiti sljedeće svojstvo. Ako je slika na kvadratu $ABCD$ simetrična u odnosu na neku od zadanih osi simetrije, onda se svaki trapez koji sudjeluje u popločivanju mora u potpunosti nalaziti s jedne strane te osi. Podijelimo zadani kvadrat na osam trokuta kao na slici 14. Dakle, ako neki trapez sudjeluje u popločivanju, on se u potpunosti nalazi unutar nekog od tih osam trokuta iz podjele.

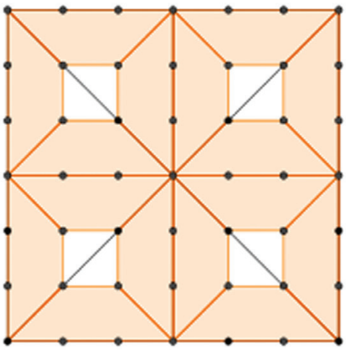
Pretpostavimo da smo u nekom od tih osam trokuta alatom nacrtali dva trapeza. Zbog uvjeta simetrije, lako je vidjeti, da položaji svih trapeza koje imamo u popločivanju moraju izgledati kao na slici 15. Međutim, tada je preostalo još četiri kvadrata duljine stranice 1 cm koja više nije moguće popločiti trokutima. Dakle, popločivanje zadanog tipa sa 16 trapeza nije moguće.

Preostaje ispitati imamo li popločivanje kod kojeg u svakom od osam trokuta podjele sa slike 14 imamo nacrtan samo jedan trapez. Tada promatramo dva slučaja. U prvom slučaju postavimo trapeze kao na slici 16. Kvadrat $LMNO$ nakon toga možemo popločiti samo trokutima koji su naznačeni na istoj slici te vidimo da nakon toga popločivanje više nije moguće.

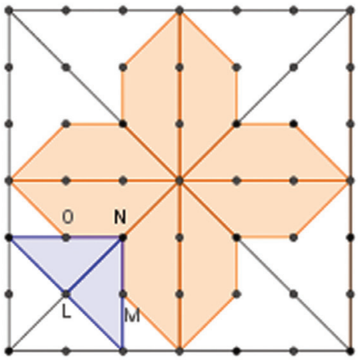
U drugom slučaju postavimo po jedan trapez u osam trokuta podjele na preostali mogući način



Slika 14.

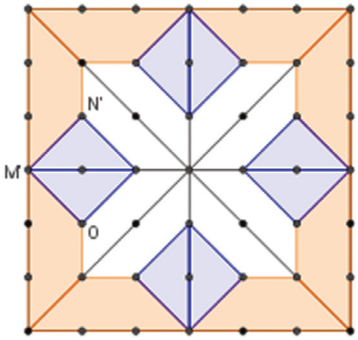


Slika 15.

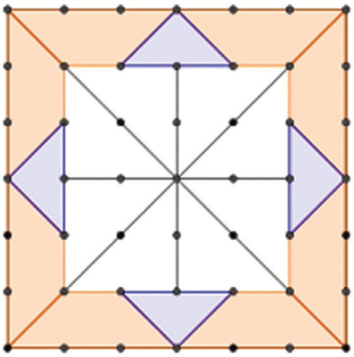


Slika 16.

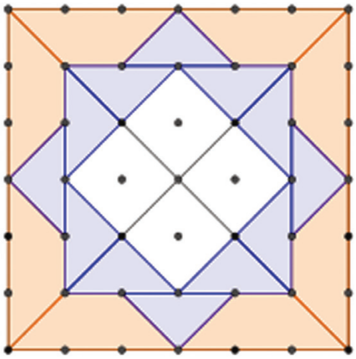
(slika 17). Tada trokut $M'N'O$ možemo popločiti trokutima na dva načina. Prvi je način prikazan na slici 17. Očito je da ne možemo dalje nastaviti s popločivanjem. Ako trokut $M'N'O$ popločimo kao na slici 18, preostaje nam za popločiti kvadrat duljine stranice 4 cm. Njegove kutove možemo popločiti samo na jedan način i dolazimo do situacije u kojoj nam preostaje za popločiti kvadrat dijagonale duljine 4 cm (slika 19). Podijelimo ga na četiri kvadrata kao na slici 19. Zbog simetrije popločivanja, dovoljno je naći broj načina na koji je moguće popločiti jedan od tih kvadrata. Lako je vidjeti da imamo samo dva načina (slika 20 i 21).



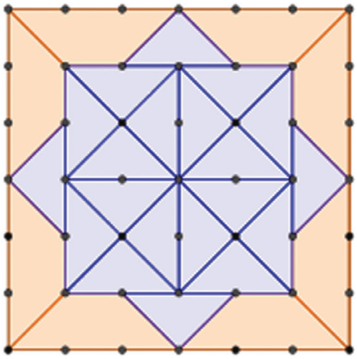
Slika 17.



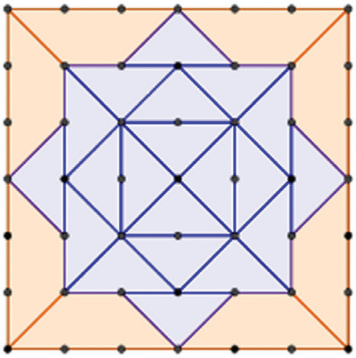
Slika 18.



Slika 19.



Slika 20.

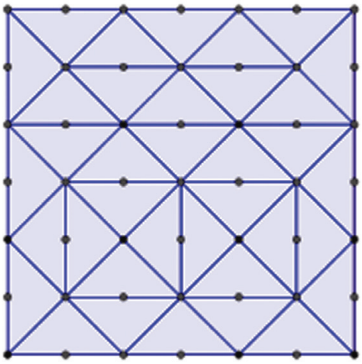


Slika 21.

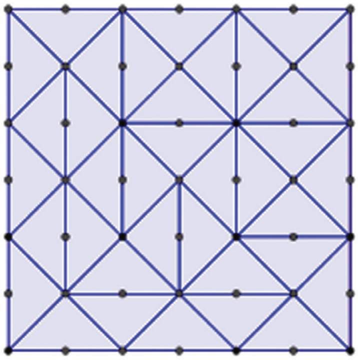
Zaključujemo konačno da imamo dva načina popločivanja koja zadovoljavaju zadane uvjete i da kod svakog načina koristimo ukupno osam trapeza.

Kako smo u prethodnom zadatku dobili samo dva popločivanja, nije bilo teško nacrtati sva dobivena rješenja. Zadatak s prebrojavanjem postaje složeniji ako zadanih popločivanja ima puno više te se u prebrojavanju možemo oslanjati samo na kombinatorne argumente, odnosno ne možemo nacrtati sve popratne slike.

Primijetimo npr. da smo i u prvom zadatku mogli dobiti više rješenja. Ako ne razmišljamo na način opisan u rješenju, nego zadatak rješavamo metodom pokušaja i pogrešaka, mogli bismo doći do još rješenja, kao npr. na slikama 22 i 23. Prebrojit ćemo stoga popločivanja zadana kao u prvom zadatku.



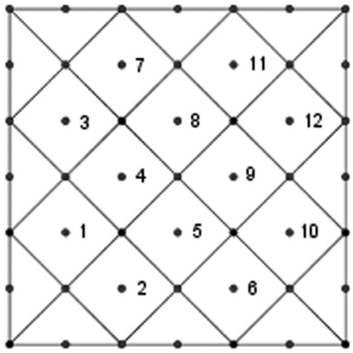
Slika 22.



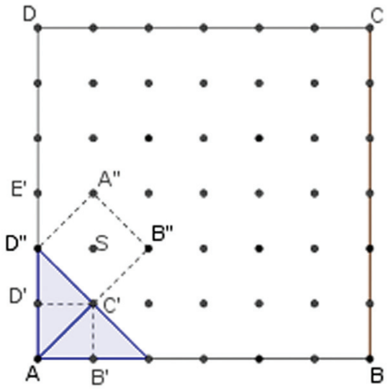
Slika 23.

Zadatak 6. Na koliko načina možemo popločiti kvadrat $ABCD$ s pomoću trokuta?

Rješenje: Da bismo riješili zadatak, pokušavamo uočiti neku pravilnost kod svakog takvog popločivanja (poželjno je stoga napraviti što više rješenja). Na slici 22 i slici 23 može se uočiti jedna takva pravilnost. Konkretno, uočavaju se kvadrati sastavljeni od dva trokuta. Ti su kvadrati takvi da su im stranice paralelne s dijagonalama kvadrata $ABCD$. Bolji pregled uočenih kvadrata je na slici 24. U nastavku ćemo pokazati da kod svakog popločivanja koje tražimo imamo istu situaciju, odnosno da je svaki kvadrat sa sheme na slici 24 prekriven točno dvama trokutima. Drugim riječima, ako postavimo neki trokut s pomoću alata, on se u potpunosti nalazi unutar nekog od kvadrata sa sheme, ili se podudara s nekim trokutom sa sheme.

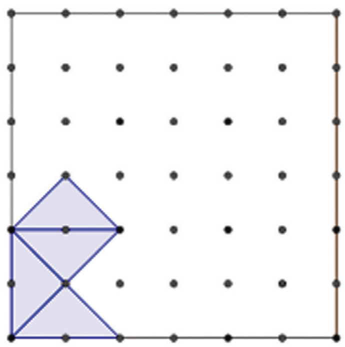


Slika 24.

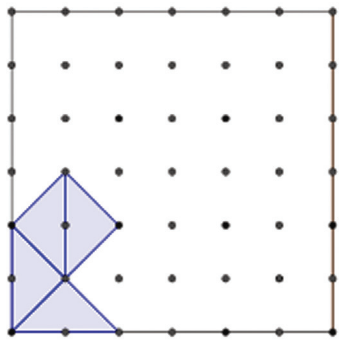


Slika 25.

Promatramo stoga za početak kvadrat $AB'C'D'$ (slika 25). Njega očito ne možemo popločiti samo jednim trokutom, već uočavamo da je jedino moguće popločivanje kao na slici 25. Proučimo nakon toga popločivanje kvadrata $A''B''C'D''$. Prvo je potrebno popločiti trokut $C'SD''$. Njega možemo popločiti koristeći se ili vodoravno ili okomito postavljenim trokutom. Pretpostavimo prvo da se koristimo vodoravnim trokutom s kojim potpuno prekrivamo trokut $C'B''D''$. Dalje moramo popločiti kvadrat $SA''E'D''$. Kao i prije, možemo zaključiti da pritom moramo nužno jednim trokutom prekriti trokut $A''B''D''$. Dakle, iskoristili smo točno dva trokuta za prekrivanje kvadrata $A''B''C'D''$. Na sličan način dolazimo do zaključka i u drugom slučaju, kad se koristimo okomitim trokutom za prekrivanje trokuta $C'SD''$. Dakle, kvadrat $A''B''C'D''$ ne možemo popločiti nekim trokutom ako on u potpunosti ne pripada tom kvadratu. Preciznije, možemo ga popločiti na točno dva načina (slike 26 i 27).



Slika 26.



Slika 27.

Daljnji način popločivanja je analogan. Podijelimo kvadrat $ABCD$ na kvadrate i nekoliko trokuta, kao na slici 24. Na slici je postavljen redoslijed kojim proučavamo popločivanje tih kvadrata. Kao i prije, zaključujemo da svaki od kvadrata u toj podjeli treba popločiti točno dvama trokutima, odnosno ne postoje dva kvadrata u toj podjeli koja dijele isti trokut pri popločivanju. Svaki od kvadrata u podjeli može se dakle popločiti na dva načina: vodoravno ili okomito postavljenim trokutima. Pritom, ako u nekom od kvadrata podjele odaberemo neki od mogućih dvaju načina postavljanja trokuta, to nikako ne utječe na način popločivanja u ostalim kvadratima. Dakle, popločivanje ovisi samo o tome kako smo izabrali popločivanje u svakom od 12 kvadrata sa sheme 24 jer za trokute u shemi nemamo izbora pri popločivanju. Lako je onda uzastopnim prebrojavanjem doći do zaključka da je ukupan broj zadanih popločivanja jednak $2^{12} = 4096$.

Zaključak

U radu smo prikazali kako koristeći se samo jednom skupinom alata možemo kreirati brojne kombinatorne zadatke vrlo različite zahtjevnosti. S pomoću takvih zadataka možemo staviti zadatke s konstrukcijama geometrijskih likova u smisleni kontekst i time povećati motivaciju učenika za njihovo rješavanje. Ujedno povezujemo i dvije različite grane matematike – geometriju i kombinatoriku.