

Scaffolding u nastavi matematike

Željka Dijanić, Čazma

Pojam *scaffolding* u novije se doba sve više koristi u području edukacije, a osobito kod poučavanja i učenja stranih jezika i matematike. Iako je kao pojam u pedagogiju uveden prije nešto više od 30 godina, sama ideja *scaffolding* pristupa poučavanju puno je starija.



Jedan od zadataka nastave matematike jest poučavanje učenika novim konceptima i idejama, stjecanje vještine rješavanja matematičkih zadataka i primjena stečenoga znanja u rješavanju svakodnevnih problema. Nastavna praksa pokazuje da većina učenika nailazi na poteškoće u tim zadatcima pa im je potrebna pomoć učitelja. Na koji način i u kojoj mjeri učitelj treba pomoći kako bi učenika osposobio da matematičke i općenito problemske zadatke rješava sa što manje poteškoća i potrebe za intervencijom učitelja? *Scaffolding* potpora učenju matematike upravo je takva vrsta pomoći.

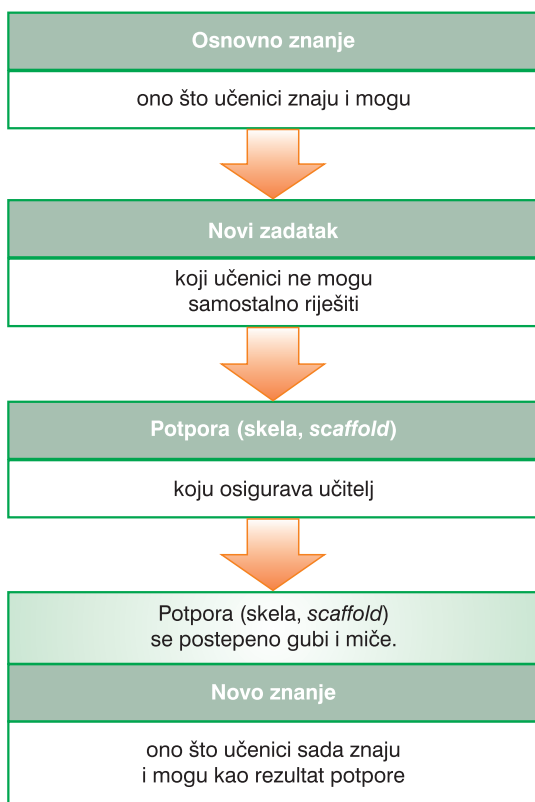
Što je *scaffolding*?

U *The glossary of education reform*¹ stoji da se *scaffolding* odnosi na različite tehnike poučavanja koje se koriste kako bi se učenika postupno dove-

lo do boljeg razumijevanja s ciljem stjecanja veće neovisnosti u učenju. Sam pojam (engl. *scaffold*, znači potporanj, skela) u nastavi označava sljedeće: učitelj pruža uzastopne razine privremene podrške koja pomaže učeniku dosegnuti višu razinu razumijevanja i stjecanja vještina što ne bi mogao postići bez takve podrške učenju. Poput fizičkog potpornja, strategije podrške postupno se uklanjaju kada više nisu potrebne, a učitelj polako prebacuje veću odgovornost za proces učenja na učenika. Dennen (2004.) takav *scaffolding* pristup poučavanju uspoređuje sa skelom na gradilištu: "U obrazovanju je skela metafora za strukturu kojom se koristimo da pomognemo učenicima ostvariti njihove ciljeve i i uklanjanje je malo po malo kada više nije potrebna, baš kao i fizička skela koja se stavlja oko zgrade na gradilištu i polako uklanja kako se gradnja bliži kraju." Slikoviti model *scaffoldinga* prikazan je na slici 1.

dr. sc. Željka Dijanić, profesorica savjetnica, Srednja škola Čazma, zeljka.dijanic@skole.hr

¹ <http://edglossary.org/scaffolding/>



Slika 1. Slikoviti model *scaffoldinga*
(Izvor: Hogan i Pressley, 1997.)

Sama ideja *scaffolding* potpore poučavanju ima korijene u radu Leva Vygotskog koji je razvio ideju o području proksimalnog razvoja djeteta unutar konstruktivističke teorije učenja.

O konstruktivističkom učenju i *scaffoldingu*

Konstruktivizam je jedna od kognitivnih teorija učenja koja naglašava i važnost i nužnost aktivnosti učenika u procesu učenja. Učenik na temelju opažanja, vlastitog iskustva i prethodnih znanja u svojoj fizičkoj i socijalnoj okolini konstruira znanje koje je jedinstveno za svakog pojedinca. Proces učenja odvija se temeljem učenikove osobne konstrukcije i rekonstrukcije znanja uz dinamičko posredovanje prethodnih znanja što je rezultat učenikovih interakcija s prirodnim svijetom u

određenom sociokulturnom kontekstu. U nastavi matematike se, prema Even i Tirosh (2003.), konstruktivističko okruženje za učenje dizajnira tako da učenicima pruža mogućnost izgradnje konceptualnog razumijevanja, da potiče rješavanje problema i razvija sposobnosti zaključivanja. Učitelj treba osmisлити odgovarajući model za učenikovu predodžbu zadane matematičke ideje, a zatim izgraditi provizorni put kojim će se učenici kretati kako bi sami konstruirali ideju koja bi bila u suglasju s općeprihvaćenim matematičkim znanjima.

Dva su temeljna oblika konstruktivističkog pristupa učenju: radikalni i društveni. Radikalni konstruktivizam veže se za rad Ernsta von Glasersfelda (1995.), čija se teorija nadovezuje na interpretaciju Jeana Piageta, dok se društveni konstruktivizam veže za rad Leva Vygotskog. Osnovna razlika tih dvaju pristupa jest različito shvaćanje konstrukcije znanja s obzirom na mjesto gdje se ono događa. Radikalni konstruktivisti smatraju da se znanje konstruira u glavi pojedinca stvaranjem vlastitih kognitivnih struktura na temelju novoga iskustva koje se povezuje s postojećim strukturama. Društveni konstruktivisti pak tvrde da se znanje konstruira u zajednici koja uči putem socijalnih interakcija, a način spoznavanja vezan je za kulturne vrijednosti i etnička vjerovanja socijalne skupine. Međutim, ta dva pristupa konstruktivističkom učenju nisu oprečni već se nadopunjuju. Prema Cobbu (1994.) učenje matematike treba promatrati i kao proces aktivne individualne izgradnje (radikalni konstruktivizam) i kao proces uključivanja i usvajanja matematičke prakse šireg društva (društveni konstruktivizam).

Vygotsky (1978.) ne osporava važnost individualne konstrukcije znanja i subjektivnog poimanja svijeta, već naglašava socijalno-kulturni utjecaj okoline na pojedinca koji uči i socijalnih interakcija kojima se znanje konstruira u zajednici koja uči. Dodaje kako se u kognitivnom razvoju djeteta svaka funkcija pojavljuje dvaput, prvo na društvenoj, a potom na individualnoj razini. Kao ključne koncepte učenja Vygotsky navodi područje proksimalnog razvoja (engl. *zone of proximal development*, ZPD) i ulogu posrednika (engl. *more knowledgeable other*, MKO). Područje proksimalnog razvoja djeteta definira se kao "raspon između trenutno postojećeg stupnja razvoja određenog samostalnim rješavanjem problema i višeg stupnja potencijalnog razvoja određenog sposobnošću rješavanja

problema uz vođenje odraslih ili u suradnji sa sposobnijim vršnjacima". Uloga posrednika u spoznajnom razvoju djeteta vrlo je bitna jer je posrednik taj koji omogućuje napredak djeteta. Stoga ga se često apstrahira pojmom potpornja ili skele (engl. *scaffolding*). Tko može preuzeti ulogu posrednika? To može biti učitelj, trener, roditelj, neka druga odrasla osoba, vršnjak koji zna više, pa čak i mlađa osoba ako je na višem mentalnom stupnju, odnosno ako bolje razumije određeni zadatak, proces ili koncept. A u današnje digitalno doba sve se više razvijaju suvremeni pristupi učenju gdje ulogu posrednika preuzima računalo.

Nadovezujući se na Vygotskijeva tumačenja uloge posrednika u konstrukciji novih znanja, Jerome Bruner prvi uvodi pojam *scaffoldinga* kao metaforu za različite oblike djelotvorne intervencije posrednika u poučavanju druge osobe. "Ako je učeniku omogućeno napredovanje uz vođenje odrasle osobe ili naprednijeg vršnjaka, tada učitelj/vršnjak služi učeniku u posredničkom obliku svijesti sve dok učenik ne uspije samostalno ovladati svojim djelovanjem putem vlastite svijesti i kontrole. Kada učenik postigne tu svjesnu kontrolu nad novom funkcijom ili konceptualnim sustavom, tada je u mogućnosti koristiti se njome dalje kao alatom. A do toga trenutka, učitelj/vršnjak obavlja kritičnu funkciju *scaffolding* potpore učenju kako bi učeniku, Vygotskyjevim riječima, omogućio internalizaciju vanjskog znanja što se potom pretvara u alat za svjesnu kontrolu" (Bruner, 1985.; prema Maybin, Mercer i Stierer, 1992.).

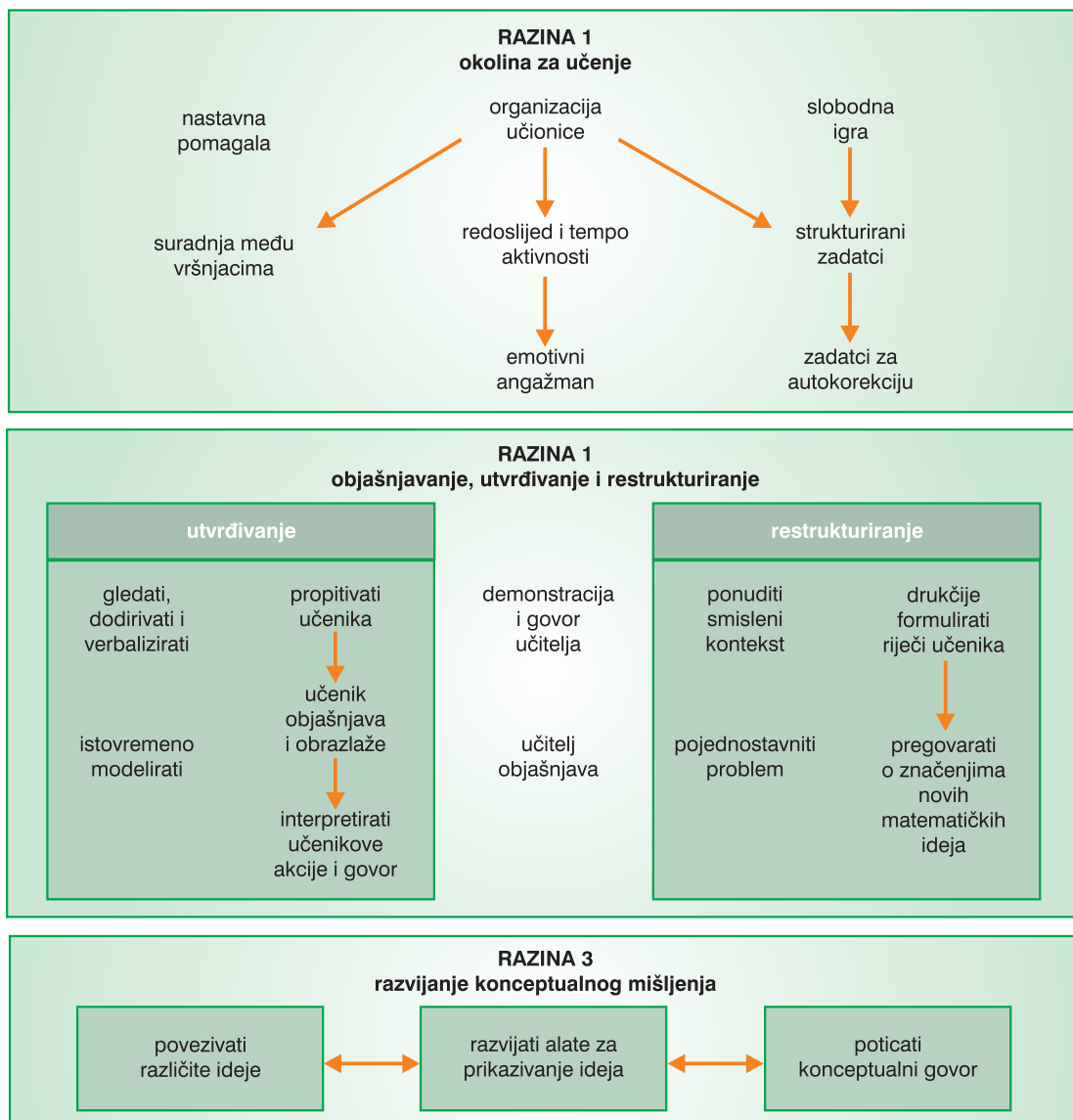
Tehnike poučavanja za *scaffolding* u matematici

Za uspješnu primjenu *scaffoldinga* u nastavi matematike Anghileri (2006.) predlaže strategije poučavanja strukturirane u tri razine. Osnovna se razina odnosi na dobru pripremu okoline za učenje nakon čega slijede razine koje uključuju interakciju učitelja i učenika u smislu različitih ideja potpore učenju matematike kroz objašnjavanje, utvrđivanje i restrukturiranje znanja što bi trebalo rezultirati razvijanjem konceptualnog mišljenja učenika. Slika 2 daje hijerarhijski prikaz razina potpore u smislu *scaffoldinga* u nastavi matematike.

Dobra priprema okoline za učenje uključuje različita nastavna pomagala poput plakata, fizičkih modela, mjernih uređaja, zagonetki, digitalnih alata i sl. te organizaciju učionice koja ne uključuje samo raspored sjedenja učenika već i planirane različite nastavne situacije koje će osigurati odgovarajući redoslijed i tempo aktivnosti učenika. Ta prva razina ne uključuje direktnu interakciju učenika i učitelja, ali daje određenu potporu za primjenu *scaffoldinga* u narednim razinama jer potiče privlačenje pozornosti učenika i njihov emotivni angažman za nadolazeće aktivnosti.

Slijedeća se razina *scaffoldinga* odnosi na objašnjavanje, utvrđivanje i restrukturiranje znanja te uključuje direktnu interakciju učenika i učitelja. Jedna od tradicionalnih metoda poučavanja za objašnjavanje novih ideja ili rješavanja novih problema svakako je demonstracija učitelja. Međutim, za poticanje boljeg razumijevanja učenika predlaže se utvrđivanje i restrukturiranje znanja. Razmatrajući neku matematičku ideju ili rješavajući novi problem učenik se vrlo često *udubi* u jednom smjeru (po uzoru na ono što je učitelj objašnjavao) pa nije u stanju uočiti druge prikladnije aspekte. Učitelj može pomoći preusmjeravanjem pažnje učenika i tako mu dati priliku za razvijanje vlastitog razumijevanja umjesto da se oslanja na ideje koje je učitelj demonstrirao. Uvidom u sliku 2 uočavaju se sljedeće vrste interakcije učenika i učitelja kako bi se utvrdilo u kojoj je mjeri učenik usvojio nove matematičke koncepte i ideje:

- poticati učenika da gleda, dodiruje i/ili verbalizira ono što vidi i/ili o čemu razmišlja (vidjeti primjer 1)
- poticati učenika da objašnjava i obrazlaže svoje ideje
- interpretirati učenikove akcije, govor, način rješavanja zadatka
- propitivati učenika kako bi mu se omogućilo savladavanje kritičnih točaka i daljnje napredovanje prema konačnom rješenju (primjer 2)
- istovremeno modelirati ideju što znači da učitelj pokazuje rješavanje sličnog problema kako bi naveo učenika da samostalno dođe do rješenja svoga problema.



Slika 2. Strategije poučavanja sa *scaffolding* potporom (Izvor: Anghileri, 2006.)

Potom slijedi još jedan korak naprijed ka restrukturiranju znanja kojim se omogućuje dodatna refleksija i promišljanje o problemu na višem nivou za što se predlažu sljedeće vrste interakcija učenika i učitelja:

- ponuditi smisleni kontekst apstraktnim matematičkim idejama kako bi učenik postupno prešao s konkretnog na apstraktno razumijevanje (primjer 3)

- pojednostavniti problem ograničavanjem stupnjeva slobode ili ga pokušati razložiti na više jednostavnijih problema (primjer 4)
- drukčije formulirati riječi učenika, posebice ako učenik ima poteškoća s uporabom matematičke terminologije u iznošenju vlastitih ideja
- u razrednoj diskusiji pregovarati o značenjima novih matematičkih ideja, gdje će učitelj pustiti učenike da iznesu sve svoje ideje, bile dobre

ili pogrešne, pa ih *bez zauzimanja strane* navoditi da sami dođu do zaključka o matematičkoj istini.

Treća i najviša razina *scaffoldinga* u nastavi matematike uključuje interakcije koje će rezultirati razvojem konceptualnog mišljenja u učenika. Učenik i učitelj tada zajednički i ravnopravno prikazuju svoje ideje jedan drugome pri čemu se koriste sljedećim aktivnostima:

- razvijanje alata za prikazivanje matematičkih ideja, koji mogu uključivati (1) interpretaciju i uporabu slika, riječi i matematičkih simbola, (2) strukturiranje praktičnih aktivnosti za pružanje snažnih vizualnih predodžbi, (3) uporabu višestrukih prikaza različitih koncepata i ideja (grafičkog, tabličnog i sl.)
- povezivanje različitih matematičkih ideja, što je na neki način proširenje prethodne razine restrukturiranja znanja, a uključuje razvoj vlastitih strategija rješavanja problemskih zadataka (primjer 5)
- poticanje konceptualnog govora (engl. *conceptual discourse*), što učeniku omogućuje razvoj matematičkih uvjerenja i vrijednosti te pridonosi razvoju njegove intelektualne autonomije. Dvije su karakteristike razrednog diskursa koje se specifično odnose na učenje matematike: (1) norme i standardi prihvatljivog matematičkog objašnjenja, (2) sadržaj cjelokupne rasprave u razredu.

A da je sama ideja *scaffoldinga* potpore učitelja u poučavanju matematike starija od pojma *scaffolding*, pokazuje nam George Pólya, utemeljitelj heurističke metode u nastavi matematike. Prema Pólyi (1945.) dužnost učitelja je pomoći učeniku da uspješno riješi problem, ali ga istovremeno i poučiti kako bi ubuduće nove probleme mogao samostalno rješavati. Njegova je ideja sljedeća: postaviti se u ulogu učenika, sagledati situaciju iz njegovog gledišta, pokušati razumjeti što se zbiva u glavi učenika, pa mu postaviti pitanja koja će ga voditi da sam otkrije put rješavanja problema. Kasnije, nakon što usvoji strategiju rješavanja problema, učenik će sam sebi postavljati slična pitanja

(o Pólyinoj strategiji rješavanja problema u četiri koraka pisala sam u Miš-u br. 57).

Primjeri tehnika *scaffoldinga*

Bilo da je učenik točno ili netočno riješio zadatak, učitelj može tražiti da verbalizira što je i zašto je u zadatku uradio onako kako jest. Takva dodatna promišljanja i pokušaji verbalizacije vlastitih misli pomažu učeniku da sam sebi objasni što je napisao, je li to dobro, u čemu je griješio, je li mogao drukčije, je li mogao kraćim postupkom i da u konačnici reorganizira vlastite misli i ideje i poveže svoje konceptualno i proceduralno znanje.

Primjer 1. Zadatak računanja s racionalnim brojevima $\frac{3}{4} + \frac{7}{15} \cdot \frac{9}{2}$ učenik je riješio ovako

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{15} \cdot \frac{9^3}{2} = \frac{3^1}{4} + \frac{21}{6^2} = \frac{22}{6}.$$

Slijedi razgovor učitelja i učenika.

Učitelj: Možeš li mi objasniti svoj postupak korak po korak?

Učenik: Jesam li krivi rezultat dobio?

Učitelj: Nisam to rekao. Zanima me što si radio i zašto.

Učenik: Prvo sam množio jer se množenje radi prije zbrajanja.

Učitelj: To je točno. A kako si kratio razlomke?

Učenik: Pa 9 i 15 sam kratio sa 3.

Učitelj: Zato si pisao 3 nakon kraćenja?

Učenik: Da.

Učitelj: Pa što znači skratiti razlomak?

Učenik: Podijeliti i brojnik i nazivnik istim brojem.

Učitelj: I što će ostati u brojniku i nazivniku nakon što ih podijeliš sa 3?

Učenik: Uuu, zeznuo sam. Trebao sam pisati 5 u nazivniku, onda bi dobio $\frac{3}{4} + \frac{21}{10}$. Ali tada ne mogu dalje 3 i 10 kratiti kao prije.

Učitelj: Misliš li da si 3 i 6 prethodno dobro kratio? Koju računsku operaciju imaš?

Učenik: Zbrajanje.

Učitelj: A kako se zbrajaju razlomci?

Učenik: Svođenjem na zajednički nazivnik.

Učitelj: Što znači svesti razlomke na zajednički nazivnik?

Učenik: Proširiti oba razlomka tako da imaju isti nazivnik. Zajednički nazivnik od 4 i 10 je 20.

Učenik potom samostalno dovršava postupak

$$\frac{3}{4} + \frac{21}{10} = \frac{15}{20} + \frac{42}{20} = \frac{57}{20}.$$

Sljedeći primjer ilustrira propitivanje učenika. To je tehnika *scaffoldinga* kojom učitelj učeniku postavlja pitanja s naglaskom na najkritičnije točke u rješavanju problema. Cilj propitivanja je da učenik što samostalnije napreduje prema rješenju problema čime se potiče njegova autonomija i podupire razumijevanje matematike općenito.

Primjer 2. U *pizzeriji* se serviraju dvije veličine *pizza*: mala i velika. Manja ima promjer 30 cm i košta 30 kn, a veća ima promjer 40 cm i košta 40 kn. Koja je isplativija? Objasni svoje razmišljanje.

Učenik nudi jednostavno, ali netočno rješenje pa ga učitelj pokušava usmjeriti propitivanjem.

Učenik: *Pizza* promjera 30 cm košta 30 kuna i to je isto kao što *pizza* promjera 40 cm košta 40 kn, pa su jednako isplative.

Učitelj: Jesi li siguran? Zašto to misliš?

Učenik: Jesam. U oba slučaja to znači da će 1 cm *pizze* koštati jednu kunu.

Učitelj: Ali što ti znači 1 cm *pizze*, ili 30 cm, ili 40 cm?

Učenik: Promjer *pizze*. To nam je zadano u zadatku.

Učitelj: Znači, kada jedeš *pizzu* ti pojedeš samo njezin promjer?

Učenik: Ne, pojedem sve.

Učitelj: A što je to *sve*? Reci mi matematičkim jezikom.

Učenik: Pojedem cijeli krug.

Učitelj: I što ti znači *sve* od toga kruga?

Učenik: Ne razumijem na što mislite.

Učitelj: Pa više različitih veličina možeš izračunati ako znaš promjer kruga.

Učenik: Mogu izračunati opseg, površinu...

Učitelj: Što ti onda predstavlja *sve* od *pizze*?

Učenik: Aaaaa, površinu. (Učenik dalje samostalno računa površinu obiju *pizza*.)

Učenik: Površina male je 706.85 cm², a površina velike 1256.64 cm².

Učitelj: Dobro. I koja je isplativija?

Učenik: Sada bi trebao dobivene površine podijeliti s kunama.

(Učenik računa

$$706.85 : 30 = 23.56, 1256.64 : 40 = 31.42)$$

To bi valjda značilo da je veća *pizza* isplativija.

Učitelj: Nisi baš siguran. Što znače brojevi koje si dobio dijeljenjem?

Učenik: Površinu *pizze* koju dobijem za jednu kunu. Od male *pizze* za jednu kunu dobijem oko 23.5 cm², a od velike 31.4 cm². Velika je isplativija. Sad sam siguran.

Apstraktni matematički pojmovi učenicima mogu biti zbunjujući ako nemaju odgovarajuću konkretnu predodžbu zadanog problema. Da bi se matematičko razumijevanje proširilo na primjene apstraktnih koncepata i procesa, prelazak s konkretnog na apstraktno treba biti postupan, a učitelj treba dati potporu u smislu uvođenja različitih konteksta kako bi učenik mogao uočiti ključne karakteristike problema.

Primjer 3.

a) Ako učenik ima poteškoća s računom 2 : 8, učitelj može pomoći stavljanjem zadatka u kontekst "Kako podijeliti dvije *pizze* na osmero ljudi? Koliko će svatko dobiti?"

b) Događa se da učenici ne razlikuju, odnosno da zamijene sljedeća dva apstraktna koncepta: najmanji zajednički višekratnik i najveći zajednički djelitelj. Jedan od razloga je i prebrzo prelaženje na

algoritam za njihovo nalaženje u nastavi, koji većina učenika usvaja bez dubljeg konceptualnog razumijevanja samih pojmova. Učitelj može pomoći konkretizacijom u vidu kratkih priča kako bi učenike potaknuo na dublje promišljanje o značenju tih pojmova. Na primjer, za zadatak **V** (18, 12) nudi se sljedeća priča: "Crvene kuglice za božićno drvce pakirane su u kutije po 18 komada, a bijele u kutije po 12 komada. Želimo li božićno drvce ukasiti jednakim brojem i crvenih i bijelih kuglica, koliko najmanje od svake boje kuglica treba kupiti?" Slično tome, za zadatak **D** (18, 12) priča glasi: "U folklornoj je skupini 18 djevojaka i 12 mladića. Voditelj ih treba rasporediti u redove jednake duljine tako da su u svakome redu plesači istoga spola. Koliko najviše članova može tada stajati u jednome redu?"

Kod rješavanja složenijih matematičkih zadataka *scaffolding* potpora učitelja itekako je važna. Učenika se može voditi Pólyinom strategijom rješavanja zadatka u četiri etape: razumijevanje zadatka, stvaranje plana, izvršavanje plana i osvrt. Za etapu planiranja kako riješiti zadatak predlaže se, između ostalog, razložiti ga na više jednostavnijih, odnosno pokušati strukturirati njegovo rješavanje po koracima.

Primjer 4. Odredite jednadžbu simetrale dužine kojoj su točke **A** (3, 4) i **B** (−1, 2) krajnje točke.

Zadaci analitičke geometrije poput ovoga mogu se lako riješiti ako je učenik ovladao rješavanjem elementarnih zadataka određivanja udaljenosti točaka, polovišta dužine, paralelnosti i okomitosti pravaca, jednadžbom pravca i slično te ako ima globalnu ideju što će raditi i kojim redoslijedom. U slučaju nedostatka takve ideje učitelj može pomoći navođenjem na strukturiranje rješavanja zadataka po koracima: (1) odrediti polovište **P** dužine $\overline{AB}$, (2) odrediti koeficijent smjera pravca **AB**, (3) odrediti koeficijent smjera k_s simetrale koja je okomita na pravac **AB**, (4) odrediti jednadžbu pravca točkom **P** koeficijenta smjera k_s .

Razvoj konceptualnog mišljenja učenika krajnji je cilj *scaffolding* potpore učenju matematike. Sljedeći primjer prikazuje kako se povezivanje različitih matematičkih koncepata može iskoristiti u

rješavanju naoko različitih, a zapravo istih zadataka.

Primjer 5. Kada učenik ima predodžbu da su $\frac{1}{4}$, 0.25, 25 % i četvrtina ekvivalentni prikazi udjela u cjelini, tada će u sljedećim zadacima prepoznati isti račun: $\frac{1}{4} \cdot 120$, $120 \cdot 0.25$, 25 % od 120 i "Ako rukomet trenira 120 učenika i četvrtinu čine djevojke, koliko je djevojaka u tom rukometnom klubu?"

LITERATURA

- 1/ J. Anghileri (2006.): *Scaffolding practices that enhance mathematics learning*, Journal of Mathematics Teacher Education, 9(1), 33–52.
- 2/ P. Cobb (1994.): *Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development*, Educational Researcher, 23(7), 13–20.
- 3/ V. P. Dennen (2004.): *Cognitive apprenticeship in educational practice: Research on scaffolding, modeling, mentoring, and coaching as instructional strategies*, In D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology*, (2nd ed., pp. 813–828), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- 14/ R. Even & D. Tirosh (2002.): *Teacher knowledge and understanding of students' mathematical learning*, In: L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (pp. 219–240), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- 5/ K. Hogan & M. Pressley (1997.): *Scaffolding student learning: Instructional approaches and issues*, Cambridge, MA: Brookline Books.
- 6/ J. Maybin, N. Mercer & B. Stierer (1992.): *'Scaffolding' learning in the classroom*, In: K. Norman (Ed.), *Thinking Voices: The work of the National Oracy Project*, (pp. 186–195), London: Hodder Arnold H& S.
- 7/ G. Pólya (1945.): *How to solve it*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- 8/ E. Von Glasersfeld (1995.): *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*, London: Falmer Press.
- 9/ L. S. Vygotsky (1978.): *Mind in society*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Naslovna fotografija preuzeta sa
<http://www.rilmac.co.uk/scaffolding>