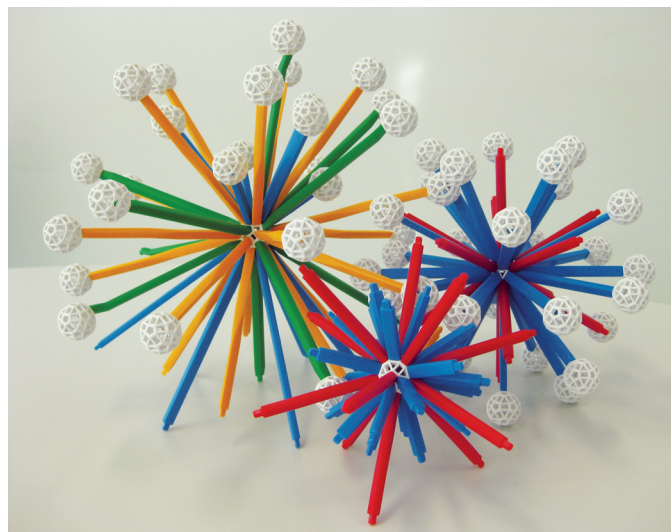


Zome Tool modeli

Anita Brozović, Zagreb
i Sanja Rukavina, Rijeka

Zome Tool modeli (<http://www.zometool.com/>) su moderan, jednostavan i primjenjiv sustav koji se može koristiti za izgradnju raznih struktura koje nalazimo u matematici, znanosti općenito, umjetnosti i arhitekturi. Vrlo su prilagodljivi i jednostavni za korištenje.



Slika 1. Zome Tool materijali

Arhitekt i matematičar Steve Bauer razvio je preteču današnjih Zome Tool modela 1970-ih godina pokušavajući izgraditi inovativne strukture koristeći se poliedrima. Nakon toga su Paul Hildebrandt i Marc Pelletier transformirali i poboljšali Baureov

sustav tako da su uveli Zome lopticu i štapiće u boji te time poboljšali učinkovitost i primjenjivost Zome Tool modela.

Zome sustav sastoji se od bijele Zome loptice i crvenih, plavih i žutih štapića od kojih se svaka boja štapića pojavljuje u tri veličine (slika 1). Također postoje zeleni štapići koji se pojavljuju u tri veličine, no rjeđe se koriste i nisu dio osnovnih elemenata Zome sustava.

Svaka Zome loptica ima pravokutne rupe za plave štapiće, trokutaste rupe za žute štapiće i peterokutne rupe za crvene i zelene štapiće (slika 2). Za Zome Tool modele vrijedi da je omjer između duljine štapića i sljedećeg štapića manje duljine iste boje jednak iracionalnom broju $\tau \approx 1.618033988...$ koji



Slika 2. Zome loptica i štapići

Anita Brozović, mag. educ. math., V. gimnazija, Zagreb, abrozovic24@gmail.com
prof. dr. sc. Sanja Rukavina, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, sanjar@math.uniri.hr

je u matematici poznat kao omjer zlatnog reza. To ih čini primjenjivima u modeliranju mnogih matematičkih zadataka. Ako duljine plavih, žutih i crvenih štapića označimo redom sa b_1 , b_2 , b_3 , y_1 , y_2 , y_3 , r_1 , r_2 , r_3 , onda je

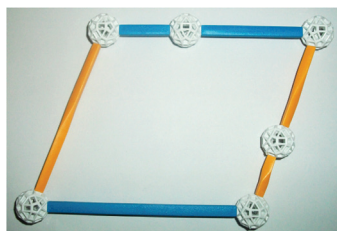
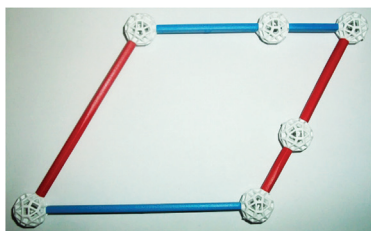
b_1	b_2	b_3
b_1	$b_1\tau$	$b_1\tau^2$
y_1	y_2	y_3
$\frac{b_1\sqrt{3}}{2}$	$\frac{b_1\tau\sqrt{3}}{2}$	$\frac{b_1\tau^2\sqrt{3}}{2}$
r_1	r_2	r_3
$\frac{b_1\sqrt{2+\tau}}{2}$	$\frac{b_1\tau\sqrt{2+\tau}}{2}$	$\frac{b_1\tau^2\sqrt{2+\tau}}{2}$

Tablica 1. Izrazi za duljine štapića

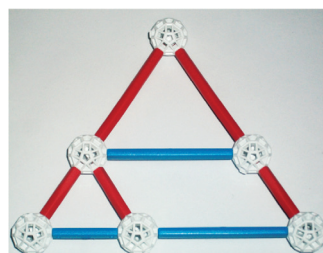
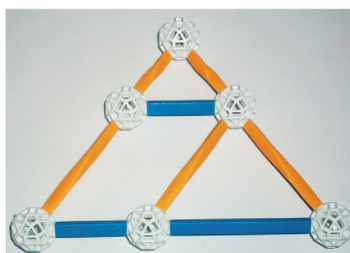
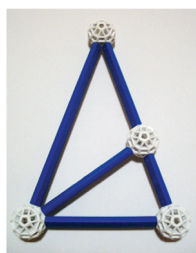
Ova svojstva Zome modela mogu učenici i sami otkriti s pomoću sljedećih prikaza paralelograma (slika 3) iz kojih se uočava da je $r_1 + r_2 = r_3$, $b_1 + b_2 = b_3$, $y_1 + y_2 = y_3$. Nakon toga se, promatranjem jednakokračnih trokuta (slika 4), može uočiti da su trokuti s duljinama stranica b_2 , $b_1 + b_2$, b_3 i b_2 , b_2 , b_1 slični. Iz toga se dobiva razmjer $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \tau$. Na sljedećem prikazu jednakokračnog trokuta može se uočiti da su i trokuti s duljinama stranica b_1 , y_1 , y_1 , onda $b_1 + b_2$, $y_1 + y_2$,

$y_1 + y_2$ i b_2 , y_2 , y_2 također slični, pa je $\frac{b_2}{b_1} = \frac{y_2}{y_1} = \tau$ i $\frac{b_1 + b_2}{b_2} = \frac{y_1 + y_2}{y_2} = \tau$. Kako je $b_1 + b_2 = b_3$, $y_1 + y_2 = y_3$, slijedi da je $\frac{y_2}{y_1} = \frac{y_3}{y_2} = \tau$. Analogno se, s pomoću sljedećeg prikaza jednakokračnog trokuta, iz sličnosti trokuta s duljinama stranica r_1 , r_1 , b_1 , onda r_2 , r_2 , b_2 i $r_1 + r_2$, $r_1 + r_2$, $b_1 + b_2$ zaključuje da je $\frac{b_2}{b_1} = \frac{r_2}{r_1} = \tau$, $\frac{b_1 + b_2}{b_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}$, odnosno da je $\frac{b_3}{b_2} = \frac{r_3}{r_2} = \tau$, pa je $\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \tau$.

Zome Tool modeli potiču kreativnost i omogućavaju ostvarivanje mnoštva ideja. Posjeduju specifična matematička svojstva koja se mogu iskoristiti za povezivanje matematičkih koncepata, utvrđivanje procedura i dokazivanje tvrdnji. Primjereni su za obradu novog gradiva, rad na dodatnoj nastavi matematike i provođenje radionica vezanih za gradivo na redovnoj nastavi i izvan nastave. Mogu se primijeniti na gradivo iz geometrije ravnine i geometrije prostora, no također i na koordinatni sustav. Posebno su pogodni za usvajanje i učvršćivanje znanja o poliedrima. Prilikom učenja o geometriji prostora učenici puno toga moraju zamisljati zbog nedostatka zornog prikaza. Zome Tool sustav nudi kvalitetan zorni prikaz poliedara i njihovih svojstava, čime se omogućuje bolje razumijevanje matematičkih koncepata. Zome Tool modeli posjeduju veliku didaktičku vrijednost, jer osim što daju uvid u matematičke objekte, omogućuju rješavanje matematičkih zadataka na učenicima pristupačniji način, odnosno izgradnjom i preslagivanjem. Podršku za nastavu primjenom Zome Tool modela moguće



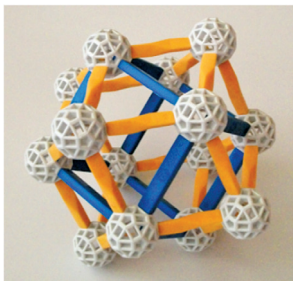
Slika 3. Paralelogrami



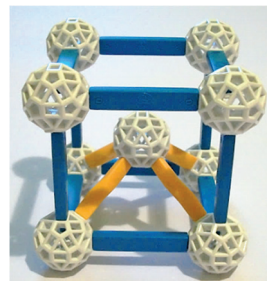
Slika 4. Jednakokračni trokuti



Slika 5. Romboidni dodekaedar



Slika 6. Romboidni dodekaedar podijeljen na piramide i kocku



Slika 7. Kocka

je naći na stranici

http://www.zometool.com/content/lessonplan_2002-2010edition.pdf,

gdje postoje brojni materijali koji mogu biti izvor ideja za nastavu matematike, ali i ostalih predmeta.

Pogledajmo dva primjera u kojima se Zome Tool modeli primjenjuju za izračunavanje volumena poliedara.

Primjer 1. Određivanje volumena romboidnog dodekaidra

Da bi se odredio volumen romboidnog dodekaidra duljine brida y_1 , potrebno ga je podijeliti na piramide i kocku. To se postiže tako da se s pomoću plavih štapića duljine b_1 postave kraće dijagonale rombova koji omeđuju zadani romboidni dodekaedar. Time je romboidni dodekaedar podijeljen na kocku i 6 četverostranih piramida jednakih volumena (slika 6).

Kocka je omeđena kvadratima duljine stranice b_1 pa volumen kocke iznosi $V_1 = b_1^3$. Volumen jedne piramide se izračuna tako da se izdvoji jedna piramida i dogradi do kocke duljine brida b_1 (slika 7).

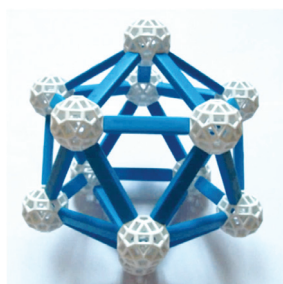
Sada se može izračunati duljina visine piramide. Duljina brida kocke je b_1 pa je duljina visine $v = \frac{b_1}{2}$. Traženi volumen jedne piramide iznosi $V_2 = \frac{B \cdot v}{3}$.

$$\frac{B \cdot v}{3} = \frac{b_1^2 \cdot \frac{b_1}{2}}{3} = \frac{b_1^3}{6}. \text{ Volumen piramide učenici}$$

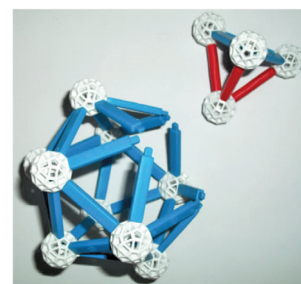
mogu odrediti na još jedan način. Naime, postavljanjem još 4 žuta štapića kocka se može podijeliti na 6 piramida jednakih volumena pa iz volumena kocke $V_1 = b_1^3$ slijedi da je volumen jedne piramide $V_2 = \frac{b_1^3}{6}$. Dakle, volumen romboidnog dodekaidra iznosi $V = V_1 + 6 \cdot V_2 = b_1^3 + 6 \cdot \frac{b_1^3}{6} = 2b_1^3$.

Primjer 2. Određivanje volumena pravilnog ikosaedra

Da bi se izračunao volumen, potrebno je podijeliti pravilni ikosaedar na prizme i/ili piramide koristeći se Zome Tool modelima. To se postiže određivanjem središta ikosaedra, tj. postavljanjem loptice unutar ikosaedra tako da bude jednako udaljena od svih njegovih vrhova. Dakle, Zome loptica koja je središte i bilo koja Zome loptica koja je vrh trebaju biti spojene štapićem jednake duljine. To se postiže štapićima duljina r_1 . Radi jednostavnosti, dovoljno je spojiti jedan jednakokranični trokut sa središtem ikosaedra. Spajanjem središta i svakog vrha pravilni se ikosaedar dijeli na 20 uspravnih



Slika 8. Pravilni ikosaedar

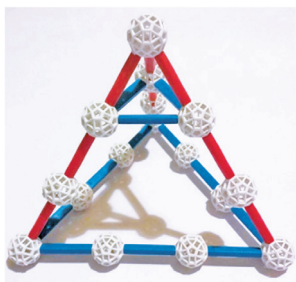


Slika 9. Središte ikosaedra

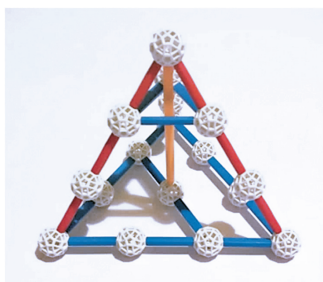
piramida jednakih volumena čije su baze jednakostranični trokuti duljina stranica b_1 i bočnih bridova duljina r_1 . Dakle, da bismo izračunali volumen ikosaedra, dovoljno je odrediti volumen jedne uspravne piramide, a zatim dobiveni rezultat pomnožiti sa 20. Baza piramide je jednakostraničan trokut

pa površina baze iznosi $B = \frac{b_1^2 \sqrt{3}}{4}$. Problem je odrediti duljinu visine piramide jer nije moguće odrediti ortogonalnu projekciju vrha koristeći se Zome Tool modelima. Da bi se mogla odrediti ortogonalna projekcija vrha na ravninu baze, potrebno je piramidu dograditi do piramide većeg volumena čija je duljina osnovnog brida $3b_1$, a duljine bočnih bridova $3r_1$. Najprije se jedna piramida odvoji od ostatka ikosaedra.

Nakon toga se bočni bridovi piramide manjeg volumena produže s pomoću štapića duljine r_1 do duljine $3r_1$. Time se dobiju bočni bridovi tražene piramide duljine $3r_1$. Zatim se sagradi jednakostranični trokut duljina stranica $3b_1$ i spoji se s bočnim bridovima tražene piramide (slika 10).



Slika 10. Trostrana piramida



Slika 11. Visina trostrane piramide

Sada se za dobivenu piramidu može odrediti ortogonalna projekcija vrha na ravninu kojoj pripada baza. Ortogonalna projekcija vrha se odredi s pomoću plavih štapića duljine b_1 . Nakon toga očekuje se da će učenici otkriti da štapić duljine y_3 spaja vrh piramide i dobivenu ortogonalnu projekciju vrha, odnosno da je tražena visina štapić duljine y_3 (slika 11).

Iz Talesova poučka slijedi da je omjer duljine brida piramide većeg volumena i duljine brida piramide manjeg volumena jednak omjeru duljine visine piramide većeg volumena i duljine visine piramide manjeg volumena. Dakle, ako se duljina visine piramide manjeg volumena označi sa h , tada

vrijedi sljedeći razmjer $3r_1 : r_1 = y_3 : h$ pa je $h = \frac{y_3}{3}$. Sada volumen piramide manjeg volumena

na iznosi $V_1 = \frac{\frac{b_1^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{y_3}{3}}{3}$. Iz prethodnih razmatranja (tablica 1) znamo da je $y_3 = \frac{b_1 \tau^2 \sqrt{3}}{2}$, pa se

uvrštavanjem dobije $V_1 = \frac{\frac{b_1^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b_1 \tau^2 \sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{b_1^3 \cdot \tau^2}{24}$. Dakle, traženi volumen ikosaedra iznosi

$V = 20 \cdot V_1 = 20 \cdot \frac{b_1^3 \cdot \tau^2}{24} = \frac{5b_1^3 \cdot \tau^2}{6}$.

Zome Tool modeli mogu se naručiti u različitim setovima koji sadrže različit broj štapića i loptica. Primjerice, mogu se naručiti kao Creator 1, Creator 2, Creator 3, Advanced Math Creator 4 System Kit, Steam System Kit ili Workshop System Kit. Da bi se mogli koristiti u razredu i uključiti svi učenici, potrebno je naručiti Advanced Math Creator 4 System Kit, Steam System Kit ili Workshop System Kit koji sadrže više od 1648 dijelova. Naime, za izgradnju bilo koje strukture i provedbu bilo koje radionice potreban je velik broj štapića i loptica i iz tog razloga se preporučuju setovi s velikim brojem dijelova. Creator 1 i Creator 2 sadrže mali broj dijelova i ne sadrže zelene štapiće koji su potrebni za izgradnju nekih struktura te se ne preporučuju za korištenje u nastavi. Cijene Zome Tool modela se kreću od 400 do 7000 kuna, a mogu se naručiti na stranici <http://www.zometool.com/shop/>.

LITERATURA

- 1/ A. Brozović (2017.): *Primjena Zome Tool modela u nastavi matematike*, diplomski rad, Sveučilište u Rijeci – Odjel za matematiku.
- 2/ G. W. Hart, H. Piccioto (2001.): *Zome Geometry – Hands-on Learning with Zome Models*, Key Curriculum Press.
- 3/ <https://en.wikipedia.org/wiki/Zome>
- 4/ <http://www.zometool.com>
- 5/ http://www.zometool.com/content/lessonplan_2002-2010edition.pdf