

Razlomci i decimalni brojevi u Australskom kurikulumu

Sonja Banić, Ivanić-Grad

U mnogim stranim kurikulumima s pojmom razlomka učenici se susreću bitno ranije, ali grade ga postupno, uz puno rada s modelima, crtanjem, povezivanjem i primjenom. Primjer takvog pristupa nalazi se i u australskom kurikulumu.

U našu srednju školu dolazi previše učenika čije se poimanje broja zaustavilo na prirodnim brojevima. S konceptima razlomaka, decimalnih i cijelih brojeva ti učenici imaju velikih problema. Ne mogu, na primjer, izračunati tri četvrtine od 100, smjestiti $\frac{6}{5}$ na brojevnju crtu ili 1 kunu i 5 lipa zapisati kao decimalni broj. Smatram da bismo trebali razmisliti o načinu na koji pristupamo poučavanju tih koncepta u osnovnoj školi.

Kod nas se učenik s pojmom razlomka prvi put susretne u drugom polugodištu petog razreda. Do kraja prvog polugodišta šestog razreda (unutar jedne godine) već trebaju znati sve bitno o razlomcima. Pritom je naglasak na formalnoj primjeni postupaka, a manje pažnje se posvećuje raznim prikazima, povezivanju i primjeni u problemima. Sve o decimalnim brojevima, od uvođenja pojma, svih računskih operacija do zaokruživanja, učenici trebaju savladati u jednom poglavlju petog razreda. Slično je i s postotcima. Do sedmog razreda nastavni program matematike pravi se da postotci ne postoje, a onda u sedmom razredu u jednom poglavlju treba naučiti sve o postotcima, od samog pojma do složenih zadataka s primjenom. Pri tome se postotci promatraju kao specijalni oblik proporcionalnosti, dok se postotak kao oblik zapisa broja uopće ne spominje i ne razmatra. Uz ovakav pristup poučavanju nije ni čudo da naši učenici imaju velikih problema s ovim osnovnim matematičkim konceptima.

U mnogim stranim kurikulumima konceptima vezanim uz racionalne brojeve pristupa se drukčije. S pojmom razlomka učenici se susreću bitno ranije, ali grade ga postupno, uz puno rada s modelima, crtanjem, povezivanjem i primjenom. Primjer takvog pristupa nalazi se i u australskom kurikulumu.

Australski kurikulum za matematiku¹ je organiziran kroz interakciju triju sadržajnih niti (engl. *content strands*) i četiri niti procesa za matematičku kompetenciju (engl. *proficiency strands*). Unutar sadržajne niti Brojevi i algebra nalaze se podniti Razlomci i decimalni brojevi te Realni brojevi. Slijedeći ishode učenja tih niti možemo pratiti razvoj koncepta razlomaka i decimalnih brojeva.

Od prvog do trećeg razreda

Podnit Razlomci i decimalni brojevi nalazi se već u prvoj godini učenja. U prvoj godini od učenika se očekuje da prepozna i opisuje jednu polovinu kao jedan od dvaju jednakih dijelova cjeline. Učenik jednu polovinu određuje na modelima: na dva jednaka dijela dijeli komad papira, skupinu kockica, traku i slično. Također određuje pola sata na analognom satu.

U drugoj godini u podniti Razlomci i decimalni brojevi ishod učenja glasi:

Prepoznaje i tumači uobičajenu uporabu polovina, četvrtina i osmina od likova i skupina.

Sonja Banić, profesorica savjetnica, Srednja škola "Ivan Švear", Ivanić-Grad, sonjabanic@gmail.com

¹ <https://australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/>

U detaljnom opisu ishoda navodi se da učenik uočava kako se skup objekata može podijeliti na različite načine za prikaz razlomaka te povezuje broj dijelova s veličinom razlomka. Učenici na ovom nivou barataju samo s razlomcima dobivenim dijenjem na pola, tj. onima koji u nazivniku imaju višekratnike broja 2. Već u drugoj godini rabe uobičajeni zapis razlomka, brojnik, nazivnik i razlomčaku crtu.

U trećoj godini proširuje se broj razlomaka koji učenici istražuju. Ishod učenja glasi:

- Modelira i prikazuje jedinične razlomke uključujući $1/2$, $1/4$, $1/3$, $1/5$ i njihove višekratnike kako bi sastavio cijelo.
 - Dijeleći površine, duljine i skupove formira polovine, trećine, četvrtine i petine, na primjer savijajući papire jednake veličine kako bi prikazao različite jedinične razlomke i usporedio broj dijelova s njihovom veličinom
 - Prikazuje jedinične razlomke na brojevnom pravcu
 - Prepoznaje da se u engleskom jeziku koristi naziv "jedna trećina" (engl. *one third*) (redosljed brojnik, nazivnik), dok se u drugim jezicima

ma razlomak može izraziti sa "tri dijela, jedan od njih" (*three parts, one of them*) (redosljed nazivnik, brojnik), na primjer japanski.

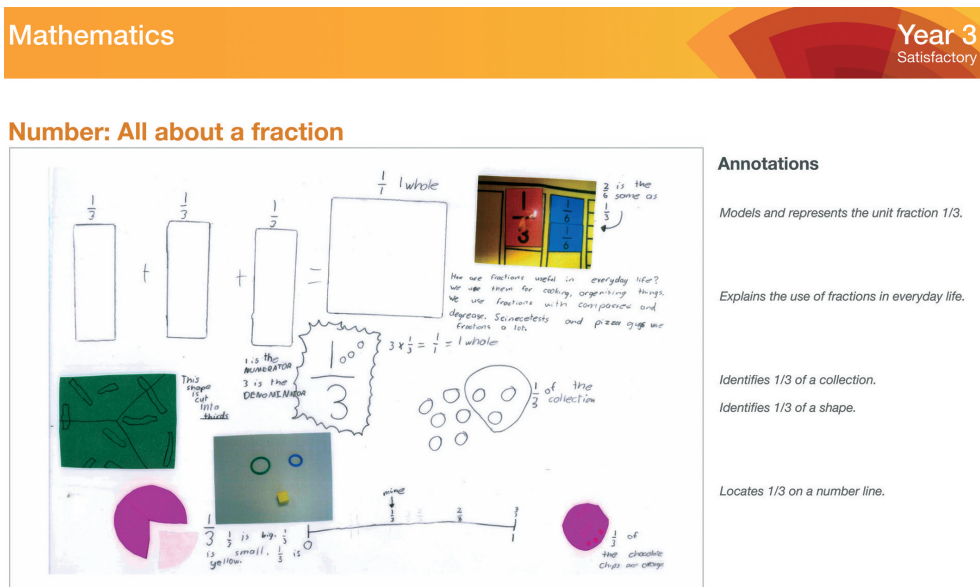
Kada zavirimo u mapu učeničkih radova, na primjerima vidimo da učenici na kraju treće godine učenja već znaju jako puno o razlomcima. U mapi zadovoljavajuće razine za treći razred nalazi se sljedeći primjer:

Primjer 1.² Učenici su završili jedinicu rada s razlomcima, promatrajući razlomke kao dio cijelog i kao dio od skupa. Također su istraživali koji su razlomci veći i manji te gdje se nalaze na brojevnom pravcu. Učenici su dobili zadatak da odaberu razlomak i napišu sve što znaju o njemu. Imali su pristup svim materijalima u učionici koji im mogu pomoći u izvršenju zadatka. Također su trebali objasniti:

- kako se razlomci koriste u svakodnevnom životu.

Bilješke uz učenikovo rješenje (slika 1):

- Modelira i prikazuje jedinični razlomak $1/3$
- Objašnjava upotrebu razlomka u svakodnevnom životu
- Određuje $1/3$ od skupa



Slika 1.

² http://docs.acara.edu.au/curriculum/worksamples/Year_3_Mathematics_Portfolio_Satisfactory.pdf

- Određuje $\frac{1}{3}$ lika
- Prikazuje $\frac{1}{3}$ na brojevnom pravcu.

Do trećeg razreda učenici rade samo s najjednostavnijim nazivnicima (polovine, četvrtine, trećine, šestine) i razmatraju samo prave razlomke i jedno cijelo. Naglasak je na prikazivanju, razumijevanju i povezivanju. No očito je da učenici na kraju treće godine znaju već jako puno o razlomcima. Učenici na zadovoljavajućoj razini razumiju pojam razlomka, prikazuju ga kao dio cjeline, kao dio skupa i na brojevnom pravcu, zbrajaju razlomke istih nazivnika i uočavaju jednakost razlomaka različitih nazivnika. Iz ove umne mape možemo naslutiti da učenici znanja o razlomcima stječu postupno, uz puno istraživanja modela, otkrivanja, crtanja, opisivanja i samostalnog zaključivanja.

Četvrti razred

U četvrtoj se godini učenja znanja o razlomcima proširuju s mješovitim brojevima. Pojam mješovitog broja gradi se brojeći u polovinama, trećinama, četvrtinama i slično. Učenici skraćuju/proširuju razlomke istražujući odnose između povezanih razlomaka na modelima. Također se uvode decimalni brojevi, ali samo do desetinki i stotinki. Učenici primjenjuju decimalne brojeve kod računanja s novcem, što im je blisko i mogu povezati sa svakodnevnicom.

Za četvrtu godinu učenja u podniti Razlomci i decimalni brojevi nalaze se tri ishoda učenja:

- Istražuje jednake razlomke koji se koriste u kontekstu.
 - Istražuje odnose između povezanih razlomaka (polovine, četvrtine i osmine ili trećine i šestine) presavijajući papirnate trake.
- Broji s pomoću polovina, trećina i četvrtina uključujući mješovite brojeve. Te razlomke prikazuje na brojevnom pravcu.
 - Pretvara mješovite brojeve u nepravde razlomke i obrnuto.
 - Istražuje primjenu razlomaka i dijeljenja kao način upravljanja prirodom: na primjer, uzimanje ne više od pola jaja iz gnijezda kako bi se zaštitila budućnost ptičje populacije.

- Prepoznaje da se sustav mjesnih vrijednosti može proširiti na desetinke i stotinke. Povezuje razlomke sa decimalnim zapisom.

- Primjenjuje dijeljenje sa 10 za proširenje sustava mjesnih vrijednosti.
- Primjenjuje znanje o razlomcima kako bi uspostavio jednakost između razlomaka i decimalnog zapisa.

Primjer iz učeničke mape za četvrti razred pokazuje nam da učenici kroz zadatke razvijaju razumijevanje i povezivanje pojmova razlomka i decimalnog broja.

Primjer 2.³ Učenici su završili jedinicu rada s razlomcima proučavajući polovine, četvrtine, trećine, petine, šestine, osmine i desetine od skupa i od cijelog.

Dobili su zadatak odabrati dva razlomka koji su jednaki i popuniti odgovarajuće podatke na radnom listu. Također su trebali kreirati praznu brojevnju crtu i označiti razlomke i decimalne brojeve na njoj.

Mathematics
Year 4
Satisfactory

Number: Fractions and decimals

Symbolic representation
Write your equivalent fractions

$\frac{1}{2}$
 $\frac{2}{4}$

Write your equivalent fractions in words

four eighths
two quarters

Pictorial Representation

Whole

Collection

Write in decimal form

0.50

Equivalent Fractions

at the shops as 50p is 1/2 of a pound

Give an example of where you might see this fraction in a real life situation

Annotations

Creates a pictorial representation of the fraction.

States equivalent fractions.

Writes equivalent fractions in words.

Writes the fraction in decimal form.

Identifies where fractions can be seen in everyday life.

Slika 2.

³ http://docs.acara.edu.au/curriculum/worksamples/Year_4_Mathematics_Portfolio_Satisfactory.pdf

Bilješke uz učenikovo rješenje (slika 2):

- Kreira slikovni prikaz razlomka
- Zapisuje jednake razlomke
- Zapisuje jednake razlomke riječima
- Zapisuje razlomak u decimalnom obliku
- Prepoznaje gdje se razlomci mogu vidjeti u svakodnevnom životu.

Peti razred

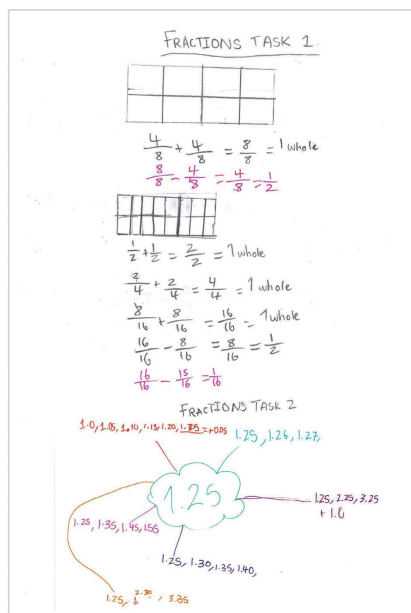
Za petu godinu učenja u podniti Razlomci i decimalni brojevi nalaze se četiri ishoda učenja:

- Uspoređuje i reda po veličini uobičajene jedinične razlomke i prikazuje ih na brojevnom pravcu.
 - Prepoznaje vezu između veličine jediničnih razlomaka i njihovih nazivnika.

Mathematics

Year 5
Satisfactory

Measurement: Garden bed



Annotations

Calculates addition and subtraction of fractions with equivalent denominators.

Creates and continues decimal patterns using hundredths, tenths and wholes.

Slika 3.

- Istražuje strategije za rješavanje problema koji uključuju zbrajanje i oduzimanje razlomaka s istim nazivnicima.
 - Modelira i rješava probleme sa zbrajanjem i oduzimanjem koji uključuju razlomke primjenjujući pomak na brojevnom pravcu ili radeći prikaze razlomaka kao dijelova likova.
- Prepoznaje da se sustav mjesnih vrijednosti može proširiti i dalje od stotinke.
 - Koristi poznavanje mjesnih vrijednosti i dijeljenje s 10 kako bi proširio brojevni sustav na tisućinke i dalje.
 - Prepoznaje jednakost jedne tisućine i 0.001.
- Uspoređuje, reda i prikazuje decimalne brojeve.
 - Pronalazi decimalne brojeve na brojevnom pravcu.

U petoj godini učenja učenici počinju zbrajati razlomke, ali samo one s istim nazivnicima i to na modelu, povezano sa slikovnim prikazom ili na brojevnom pravcu. Učenici otkrivaju decimalne brojeve s više decimala, ali ih samo uspoređuju i prikazuju na brojevnom pravcu.

Primjer 3.⁴ Učenici su završili jedinicu rada s razlomcima i decimalnim brojevima. Trebaju riješiti dva zadatka:

- Podijeli veliku pravokutnu vrtnu gredicu na nekoliko jednakih dijelova. Koje jednakosti s pomoću zbrajanja i oduzimanja razlomaka možeš napisati promatrajući svoju vrtnu gredicu?
- Tom je napisao niz brojeva koji uključuje decimalni broj 1.25. Koji bi to niz mogao biti?

Bilješke uz učenikovo rješenje (slika 3):

- Zbraja i oduzima razlomke s jednakim nazivnicima
- Kreira i nastavlja niz decimalnih brojeva koristeći stotice, desetice i cijelo.

Šesti i sedmi razred

Za šestu godinu učenja u podniti Razlomci i decimalni brojevi nalazi se sedam ishoda učenja:

⁴ http://docs.acara.edu.au/curriculum/worksamples/Year_5_Mathematics_Portfolio_Satisfactory.pdf

- Uspoređuje razlomke s povezanim nazivnicima i prikazuje ih na brojevnom pravcu.
 - Prikazuje jednakost razlomaka primjenjujući crteže i modele.
- Rješava probleme koji uključuju zbrajanje i oduzimanje razlomaka s istim ili povezanim nazivnicima.
 - Razumije postupak za zbrajanje i oduzimanje razlomaka s povezanim nazivnicima.
 - Rješava realistične adicijske probleme (probleme koji se rješavaju primjenom zbrajanja i oduzimanja) koji uključuju razlomke kako bi razvio razumijevanje jednakosti razlomaka i primjenu razlomaka kao pribrojnika.
 - Modelira i rješava adicijske probleme koji uključuju razlomke primjenjujući metode kao pomak po brojevnom pravcu ili izrađujući prikaze razlomaka kao dijelova likova.
- Računa jednostavne razlomke od količine gdje je rezultat cijeli broj, sa ili bez upotrebe digitalnih tehnologija.
 - Prepoznaje da je izračunati jednu trećinu od količine isto kao i podijeliti sa brojem 3.
- Zbraja i oduzima decimalne brojeve, sa ili bez digitalnih tehnologija, i koristi se procjenom i zaokruživanjem kako bi provjerio smislenost odgovora.
 - Proširuje strategiju s cijelim brojevima kako bi istražio i razvio smislenu pisanu strategiju za zbrajanje i oduzimanje decimalnih brojeva do tisućica.
 - Istražuje i primjenjuje efikasne metode za rješavanje problema koje zahtijevaju računanje s decimalnim brojevima kako bi postigao vještinu u računanju s decimalnim brojevima i u određivanju odgovarajućih operacija.
- Množi decimalne brojeve s cijelim brojevima, dijeli s cijelim brojevima različitim od nule.
 - Tumači rezultat računa kako bi dao odgovor prikladan kontekstu.
- Množi i dijeli decimalne brojeve potencijama broja 10.
- Povezuje jednake razlomke, decimalne brojeve i postotke.
 - Povezuje razlomke, decimalne brojeve i postotke kao različite prikaze istog broja, vješto

prelazeći između prikaza i birajući prikladne za rješavanje problema.

U šestoj godini učenja uspoređuju se i zbrajaju razlomci s povezanim nazivnicima (na primjer trećine i šestine), računaju razlomci od količine i primjenjuje se znanje o razlomcima u problemskim zadacima. I dalje se inzistira na prikazu razlomaka, crtežima, modelima i objašnjavanju veza i postupaka. Tek nakon toga, u sedmoj godini učenja, zbrajaju se razlomci s nepovezanim nazivnicima, množe i dijele razlomci.

U sedmoj godini učenja podnit Razlomci i decimalni brojevi zamjenjuje se podniti Realni brojevi.

Unutar nje nalazi se čak osam ishoda učenja:

- Uspoređuje razlomke koristeći se ekvivalencijom. Smješta i prikazuje pozitivne i negativne razlomke i mješovite brojeve na brojevnom pravcu.
- Rješava probleme koji obuhvaćaju zbrajanje i oduzimanje razlomaka, uključujući i one s nepovezanim nazivnicima.
- Množi i dijeli razlomke i decimalne brojeve primjenjujući efikasne pisane strategije i digitalne tehnologije.
- Izražava jednu veličinu kao razlomak od druge, sa ili bez upotrebe digitalne tehnologije.
- Zaokružuje decimalne brojeve na zadani broj decimalnih mjesta.
- Povezuje razlomke, decimalne brojeve i postotke i izvršava jednostavne prijelaze među zapisima.
- Računa postotak od količine i izražava jednu količinu kao postotak od druge, sa ili bez upotrebe digitalne tehnologije.
- Prepoznaje i rješava probleme koji uključuju jednostavne razmjere.

U australskom kurikulumu pojmovi razlomka i decimalnih brojeva uvode se puno ranije nego u našem programu, ali se uvode postupno i u malim koracima. Na taj način učenici imaju dovoljno vremena da izgrade i razumiju te pojmove. U zadacima koji se postavljaju učenicima naglasak je na razumijevanju pojma i povezivanju različitih prikaza. Algoritmi za računanje s razlomcima grade se postupno iz razumijevanja pojma razlomka, pa nisu učenicima apstraktni i ostaju trajno usvojeni.