

# Božićna zvijezda

## Vertikalno povezivanje



Sandra Ježić, Zagreb

Važan cilj nastave matematike je vertikalno povezivanje matematičkih sadržaja. Učenici često ne vide potrebu za učenjem nekih nastavnih sadržaja i pitaju što će im to. Na to pitanje je dobar odgovor dao Steve Jobs 2005. godine u svom govoru na sveučilištu Stanford na promociji diploma. Nazvao je to *slaganje kockica* i rekao:

*Ne možete složiti kockice gledajući unaprijed, možete ih složiti jedino gledajući unazad. Morate vjerovati da će se kockice nekako povezati u budućnosti.*

Tako i naši učenici doživljavaju gradivo kao hrpu kockica rasutih pred sobom koje nisu u mogućnosti u tom trenutku posložiti. Moraju biti strpljivi i vjerovati nam da će se jednom, u njihovom budućem zanimanju te kockice ipak složiti u nešto korisno i važno.

## Motivacija

U stalnoj potrazi za konkretnim primjerima kroz koje bih mogla provesti vertikalno povezivanje, naišla sam na primjer božićne zvijezde koju mogu izraditi učenici 8. razreda primjenjujući matematička znanja od 5. – 8. razreda.

Ovaj primjer s dodatne nastave za 8. razrede je posebno vrijedan zato jer učenici u ovom kreativnom radu ponove: sva svojstva kvadrata, sličnost, koeficijent sličnosti, sukladnost, dijeljenje dužine na jednake dijelove, dijeljenje kutova na jednake dije-

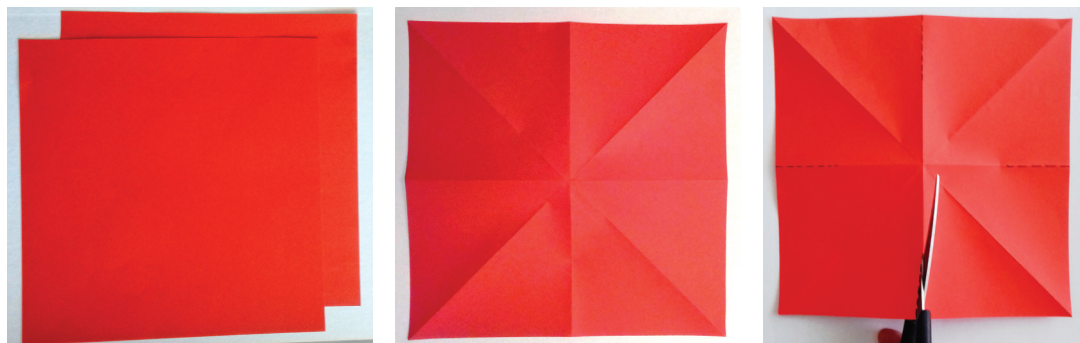
love, izračunavanje veličina kutova trokuta, pojam i svojstva deltoida, uočavanje pravokutnih i jednakokračnih trokuta i određivanje duljina njihovih stranica, primjenu Pitagorina poučka na pravokutan trokut i kvadrat, kvadrat binoma, skraćivanje razlomka, izlučivanje zajedničkog faktora.

## Uvodni dio

U uvodnom dijelu učenike se upozna s ciljem rada – izradom božićnih zvijezda kojima ćemo ukrasiti učionicu. Ukratko im se predstavi postupak i pro-

---

Sandra Ježić, učiteljica mentorica, Osnovna škola Sesvete, Zagreb, [sandra.jezic@zg.t-com.hr](mailto:sandra.jezic@zg.t-com.hr)



Slika 1. Početno presavijanje papira oblika kvadrata i rezanje

blem pri zarezivanju papira škarama (slika 1) po duljini  $x$  koju prvo trebamo izračunati. Zato sve prvo radimo na radnom, bijelom modelu kvadrata.

## Aktivnosti za učenike

S učenicima dogovorimo oznake:

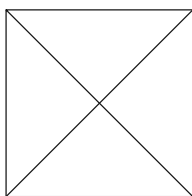
$a$  = duljina stranice kvadrata

$d$  = duljina dijagonale kvadrata.

### Aktivnost 1.

Presavij papir oblika kvadrata po dijagonalama.

Promotri sliku i odgovori:



- a) Kolike su veličine kutova između dijagonala i stranica kvadrata?

Njihove su veličine  $45^\circ$ .

- b) Koje nove likove uočavaš na slici?

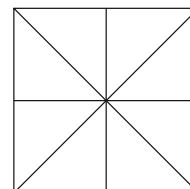
Kvadrat je dijagonalama podijeljen na četiri sukladna jednakokračna pravokutna trokuta kojima je hipotenuza duljine  $a$ , a katete su duljine  $\frac{d}{2}$  (poučak SSS ili SKS).

(Ponoviti da su dijagonale kvadrata jednakih duljina i međusobno okomite.)

### Aktivnost 2.

Kvadrat dalje presavij po dužinama koje spajaju polovišta nasuprotnih stranica kvadrata.

Promotri sliku i odgovori:



- a) Koja svojstva imaju dužine koje spajaju polovišta nasuprotnih stranica kvadrata?

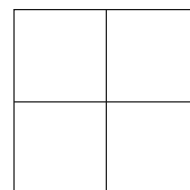
- Obje te dužine su jednakih duljina.
- Sijeku se u istoj točki u kojoj se sijeku i dijagonale.
- Duljine tih dužina su jednake duljini  $a$  stranice kvadrata.
- Svaka od tih dužina usporedna je sa stranicama kvadrata.

- b) Koje likove sada uočavaš na slici?

Kvadrat je sada podijeljen na osam sukladnih jednakokračnih pravokutnih trokuta kojima je hipotenuza duljine  $\frac{d}{2}$ , a katete su duljine  $\frac{a}{2}$ .

### Aktivnost 3.

Zanemari na trenutak dijagonale i promotri kvadrat podijeljen dužinama koje spajaju polovišta nasuprotnih stranica.



Što uočavaš?

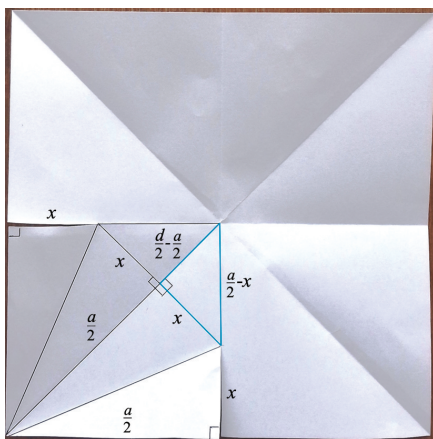
- Kvadrat je podijeljen na 4 sukladna kvadrata sa stranicom duljine  $\frac{a}{2}$ .
- Sva ta četiri manja kvadrata slična su velikom kvadratu.
- Koliki je koeficijent te sličnosti?  $k = \frac{1}{2}$

## Aktivnost 4A. (Primjena Pitagorina poučka)

- a) Promatraj donji lijevi od tih četiriju manjih kvadrata.

Na svakoj od dviju dužina koje spajaju položajna stranica kvadrata zarezati škarama počevši od stranice kvadrata, na slici 2 označeno sa  $x$ . Zareži škarama otprilike budući da još ne znamo koliko točno moramo zarezati.

Nakon rezanja papira po duljini  $x$ , papir se presavije tako da se dužina duljine  $\frac{a}{2}$  poklopi s dijagonalom. Označimo duljine novonastalih dužina (slika 2).



Slika 2. Četvrtina kvadrata

- b) U promatranoj donjoj četvrtini kvadrata dobivamo novi četverokut. Prepoznaješ li koji?

To je četverokut s dijagonalama duljina  $\frac{d}{2}$  i  $2x$ .

Što uočavaš?

Dijagonale su mu okomite. Dakle, to je deltoid. Susjedne stranice nad kraćom dijagonalom su mu jednakih duljina.

Dio tog deltoida je i pravokutan trokut s kateta-

ma duljina  $x$  i  $\left(\frac{d}{2} - \frac{a}{2}\right)$ , te hipotenuzom duljine  $\left(\frac{a}{2} - x\right)$  (slika 2)

- c) Primijenimo na njega Pitagorin poučak.

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{d}{2} - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot x + x^2 = x^2 + \frac{d^2}{4} - 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4}.$$

Oduzmemo s obje strane jednakosti pribrojnice  $\frac{a^2}{4}$  i  $x^2$ :

$$-ax = \frac{d^2}{4} - \frac{ad}{2} \quad / : (-a)$$

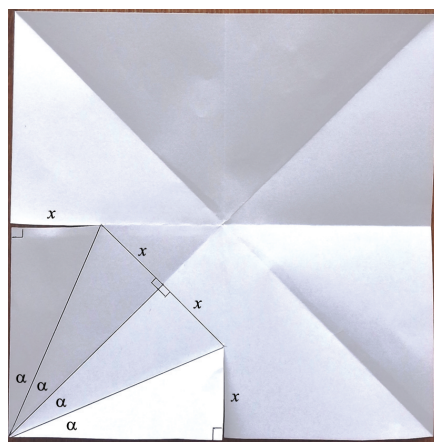
$$x = -\frac{d^2}{4a} + \frac{d}{2}$$

$$x = -\frac{2a^2}{4a} + \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$x = -\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \implies x = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1).$$

## Aktivnost 4B. (Bez primjene Pitagorina poučka)

U donjoj četvrtini kvadrata nakon zarezivanja duljine  $x$  i presavijanja pri kojem se dužina duljine  $\frac{a}{2}$  poklopi s dijagonalom i s donje i s lijeve strane, donji lijevi pravi kut je podijeljen (slika 3).



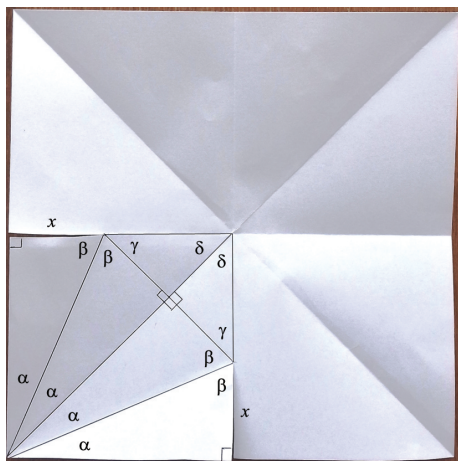
Slika 3. Četiri jednaka dijela pravog kuta

- a) Što uočavaš?

Taj pravi kut je podijeljen na četiri jednaka dijela,

dakle imamo četiri kuta veličine  $\alpha = 22^\circ 30'$ . (Izračunaju  $90^\circ : 4$ .)

- b) Nakon dodatnog označavanja (slika 4) odredi i preostale kutove u toj donjoj četvrtini početnog kvadrata.



Slika 4. Označavanje kutova

Učenici uoče da se u tom manjem kvadratu nalaze četiri sukladna pravokutna trokuta s katetama duljina  $x$  i  $\frac{a}{2}$ , te dva sukladna pravokutna trokuta s katetama duljina  $x$  i  $\left(\frac{d}{2} - \frac{a}{2}\right)$ , te hipotenuzom duljine  $\left(\frac{a}{2} - x\right)$ .

Budući da je  $\alpha = 22^\circ 30'$ , lako izračunaju da je  $\beta = 90^\circ - \alpha = 67^\circ 30'$ . Nadalje, sa slike zaključuje da je  $2\beta + \gamma = 180^\circ$  te izračunaju da je  $\gamma = 45^\circ$ .

Zaključite (ili izračunaju) da je i  $\delta = 45^\circ$ . Što to znači?

To znači da je taj pravokutan trokut jednakokratan te je  $x = \frac{d}{2} - \frac{a}{2}$  (slike 2 i 4).

Sređivanjem se dobije  $x = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$ .

#### Aktivnost 5. Izračunavanje duljine $x$ za konkretan kvadrat

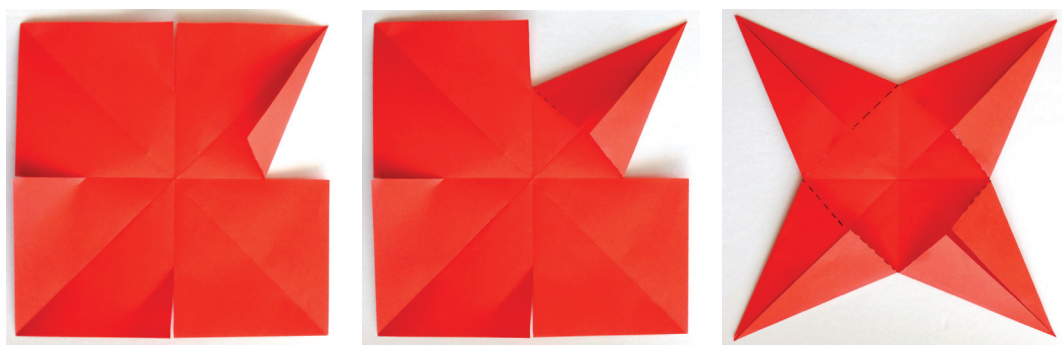
Za odabranu duljinu stranice kvadrata  $a = 21$  cm (to je duljina stranice najvećeg mogućeg kvadrata koji se može dobiti na A4 papiru) uvrštavanjem u dobivenu formulu dobivamo da je  $x \approx 4.35 \approx 4.4$  cm.

#### Aktivnost 6. Izrada crvene božićne zvijezde

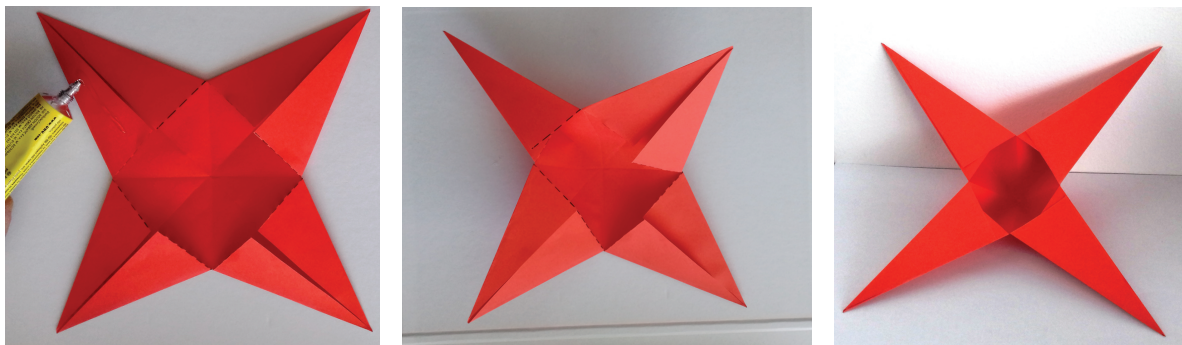
Na crvenim papirima oblika kvadrata provedi opisana presavijanja i rezanja duljine  $x = 4.4$  cm te daljnje presavijanje papira prema priloženom modelu (slika 5).

Zatim nastavi s lijepljenjem i spajanjem (slika 6).

Dvije tako dobivene polovice zvijezde zalijepi jednu za drugu tako da su im krakovi međusobno zakrenuti (vidi naslovnu sliku).



Slika 5. Rezanje i daljnje presavijanje papira



Slika 6. Sastavljanje jedne polovice zvijezde

### Evaluacija rada

Opisane se aktivnosti provode kroz dva školska sata. Na prvom se satu izvode aktivnosti vezane uz matematičke sadržaje, a na drugom su satu praktične aktivnosti izrade samih zvijezda.

Pripremila sam sve potrebne materijale (papire, škare, ljepilo), a budući se radi o dodatnoj nastavi na kojoj su i učenici koji svake godine sudjeluju na natjecanjima, smatrala sam da nije potrebno da sami unaprijed ponove gradivo prethodnih razreda koje smo koristili. Zanimalo me koliko je stvarno znanje, bez prethodnog ponavljanja. I naravno, vrlo brzo su se sjetili svih pojmova i svojstava koje smo koristili. Jedino se nisu sjetili deltoida pa smo to zajedno ponovili. Kako je na dodatnoj nastavi uvijek opuštena atmosfera i slobodno kretanje učenika po učionici, učenici su si međusobno objašnjavali, komentirali i zajednički dolazili do zaključaka. Bili su vrlo zainteresirani, aktivnosti su im bile zanimljive, ponovili su nastavne sadržaje iz prethodnih razreda i pri tome još jednom shvatili koliko je matematika povezana i primjenjiva. Iznenadilo ih je što se neke geometrijske konstrukcije (polovište dužine, simetrala dužine, simetrala kuta) i veličine nekih kutova mogu dobiti bez geometrijskog pribora, presavijanjem papira.

Moji učenici su bez razmišljanja krenuli s aktivnostima 4A jer smo u to vrijeme radili Pitagorin poučak. Učenike treba pustiti da sami odaberu način pronalaženja duljine  $x$  – primjenom Pitagorina poučka

ili određivanjem veličine kutova. Bilo bi idealno da dio učenika riješi na jedan, a dio na drugi način te potom međusobno prezentiraju postupke.

Zvijezde koje su izradili objesila sam na stropne lampe u matematičkoj učionici (slika 7) i bile su nam lijep ukras u božićno vrijeme. Jedna učenica koja nije sudjelovala u izradi, za vrijeme nastave je gledajući u te božićne zvijezde koje su se lagano vrtjele, rekla: "Ovo je stvarno fascinantno!".



Slika 7. Matematička učionica ukrašena božićnim zvijezdama

#### LITERATURA

- 1/ <http://www.stanford.edu>
- 2/ [http://www.uredisvojd.com/article/1040/zvjezdice\\_od\\_papira](http://www.uredisvojd.com/article/1040/zvjezdice_od_papira).