Izračunavanje površine trokuta na drukčiji način

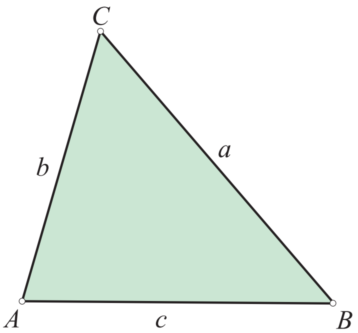
Ivan Kelava, Lovinac

U nekim slučajevima površinu trokuta kojemu su poznate duljine svih triju stranica možemo izračunati brže nego s pomoću Heronove formule.

Poznato je da površinu bilo kojeg trokuta, kada su mu poznate duljine svih triju stranica, možemo izračunati s pomoću poznate Heronove formule $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je s poluopseg, ili s pomoću neke modificirane Heronove formule.

Ovdje ćemo pokazati izračunavanje površine trokuta na malo drukčiji način, odnosno s pomoću formule koja nije izvedena iz Heronove formule. Pogledajmo kako u nekim slučajevima možemo brže izračunati površinu trokuta kojemu su poznate duljine svih triju stranica.

Neka je zadan trokut ABC s duljinama stranica a, b i c (slika 1).



Slika 1.

Ako su poznate duljine svih triju stranica trokuta, onda njegovu površinu možemo izračunati i s pomoću formule:

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}, \qquad (1)$$

gdje su:

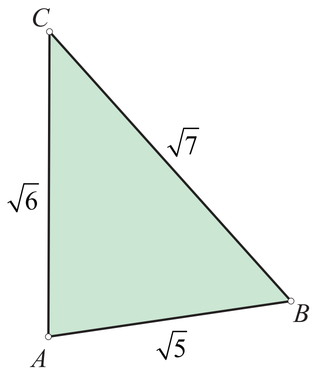
$$x^2 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}, \quad y^2 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2},$$
$$z^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Ova je formula pogodna za izračunavanje površine trokuta kada su mu duljine svih stranica ili barem neke od njih iracionalni brojevi određenog oblika, pa možemo višestruko puta brže izračunati površinu nego s pomoću Heronove formule. Pogodna je za primjenu kada su duljine stranica na primjer: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ ili $2\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ ili $\sqrt{6}$, 2, $\sqrt{8}$ ili $3\sqrt{8}$,

Ivan Kelava, učitelj mentor, Osnovna škola Lovinac, Lovinac, `ivan.kelava16@skole.hr`

5, $2\sqrt{10}$ ili $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ i slično. Za sam proces izračunavanja površine uopće nije bitno što predstavljaju veličine x, y i z, odnosno njihovi kvadrati x^2, y^2 i z^2. Lijeve strane posljednjih triju jednakosti mogu međusobno mijenjati mjesta, isto tako i desne, što izračunavanje površine čini još jednostavnijim.

Primjer 1. Treba izračunati površinu trokuta ABC s duljinama stranica kao na slici 2.



Slika 2.

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{7+5-6}{2} = \frac{6}{2} = 3\\
y^2 &= \frac{6+5-7}{2} = \frac{4}{2} = 2\\
z^2 &= \frac{7+6-5}{2} = \frac{8}{2} = 4\\
P &= \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 2+3\cdot 4+2\cdot 4}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{6+12+8}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{26}.
\end{aligned}
$$

Radi usporedbe, isti zadatak riješit ćemo s pomoću Heronove formule

$$P = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$$s = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2}$$

$$P = \sqrt{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2}-\sqrt{7}\right) \cdot\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2}-\sqrt{6}\right)\left(\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2}-\sqrt{5}\right)}$$

$$P = \sqrt{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{2} \cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}-2\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{2}}$$

$$P = \sqrt{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2} \cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2}}$$

$$P = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{4} \cdot\frac{\sqrt{42}+\sqrt{30}-6+\sqrt{35}+5-\sqrt{30}-7-\sqrt{35}+\sqrt{42}}{4}}$$

$$
\begin{aligned}
P &= \sqrt{\frac{7+2\sqrt{42}+6-5}{4}\cdot\frac{2\sqrt{42}-8}{4}}\\
&= \sqrt{\frac{2\sqrt{42}+8}{4}\cdot\frac{2\sqrt{42}-8}{4}}\\
&= \sqrt{\frac{\left(2\sqrt{42}\right)^2-8^2}{16}}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{4\cdot 42-64}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{104}\\
&= \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{26}\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{26}.
\end{aligned}
$$

Druga možebitna prednost formule (1) jest u otkrivanju o kojoj se vrsti trokuta radi, a da to nismo imali namjeru učiniti.

- Ako su: $x^2 > 0$, $y^2 > 0$ i $z^2 > 0$, trokut je šiljastokutan.

- Ako su: $x^2 > 0$, $y^2 > 0$, a $z^2 = 0$, trokut je pravokutan.
- Ako su: $x^2 > 0$, $y^2 > 0$, a $z^2 < 0$ (z je imaginaran), trokut je tupokutan.

Kod dva posljednja slučaja ne mora strogo z^2 biti jednako nuli, odnosno manje od nule. Važno je samo da jedan od kvadrata bude 0, a ostala dva pozitivna da bi trokut bio pravokutan, odnosno jedan kvadrat manji od nule, a druga dva pozitivna da bi trokut bio tupokutan. Već smo ranije rekli da za samo izračunavanje površine to nije bitno.

Primjer 2. Treba izračunati površinu trokuta ABC kojemu su duljine stranica $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{11}$.

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{5+11-6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ y^2 &= \frac{6+11-5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\ z^2 &= \frac{6+5-11}{2} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Kako je $z^2 = 0$, trokut ABC je pravokutan, pa se možemo radi bržeg računanja koristiti formulom $P = \dfrac{ab}{2}$, a možemo računati i s pomoću formule (1), što također ide dosta brzo

$$P = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{30},$$

ili drukčije

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 6 + 5\cdot 0 + 6\cdot 0} = \frac{1}{2}\sqrt{30}.$$

Primjer 3. Treba izračunati površinu trokuta ABC kojemu su duljine stranica $a = 4$, $b = 5$ i $c = 7$.

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{16+25-49}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \\ y^2 &= \frac{16+49-25}{2} = \frac{40}{2} = 20 \\ z^2 &= \frac{49+25-16}{2} = \frac{58}{2} = 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\sqrt{-4\cdot 20 + (-4)\cdot 29 + 20\cdot 29} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-80-116+580} = \frac{1}{2}\sqrt{384} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{6} = 4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

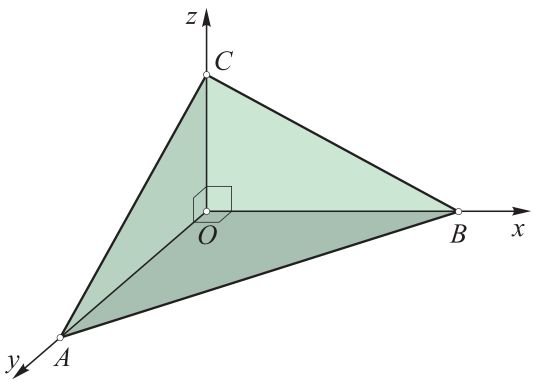
Ovaj primjer pokazuje da je trokut ABC tupokutan jer je jedan kvadrat, a u ovom slučaju, $x^2 < 0$, odnosno x je imaginarni broj. Pokazuje nam i to da formula (1) nije baš pogodna za primjenu kada su ovakve i slične duljine stranica, jer ima malo više računanja.

Izvod formule (1)

Analogon pravokutnom trokutu u ravnini je tetraedar u trodimenzionalnom prostoru (slika 3). Poznato je da za takav pravokutni tetraedar vrijedi:

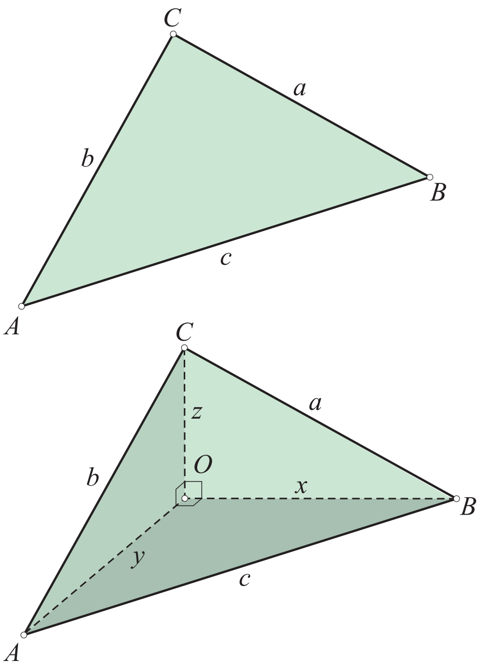
$$P^2_{\triangle ABC} = P^2_{\triangle ABO} + P^2_{\triangle BCO} + P^2_{\triangle ACO},$$

što je analogon Pitagorinu poučku.



Slika 3.

Možemo reći i ovako, trokut ABC nastao je presijecanjem koordinatnih ravnina nekom ravninom Δ. Ako koordinatne ravnine presijecamo nekim drugim ravninama, pod različitim kutovima, onda dobivamo drukčije pravokutne tetraedre, odnosno drukčije pravokutne trokute, pa samim time i drukčiji trokut ABC. Stoga se nazire mogućnost izvođenja formule za površinu trokuta. **Ideja** je da bilo koji trokut ABC možemo promatrati kao **plohu nekog pravokutnog tetraedra**, kao što je prikazano na slici 4.



Slika 4.

Katete x, y i z pravokutnih trokuta ABO, BCO i ACO izrazit ćemo preko stranica trokuta ABC.

$$x^2 = a^2 - z^2$$
$$x^2 = c^2 - y^2.$$

Nakon zbrajanja ovih jednadžbi imamo:

$$2x^2 = a^2 + c^2 - (z^2 + y^2)$$
$$2x^2 = a^2 + c^2 - b^2$$
$$x^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}.$$

Na sličan način se dobije da je

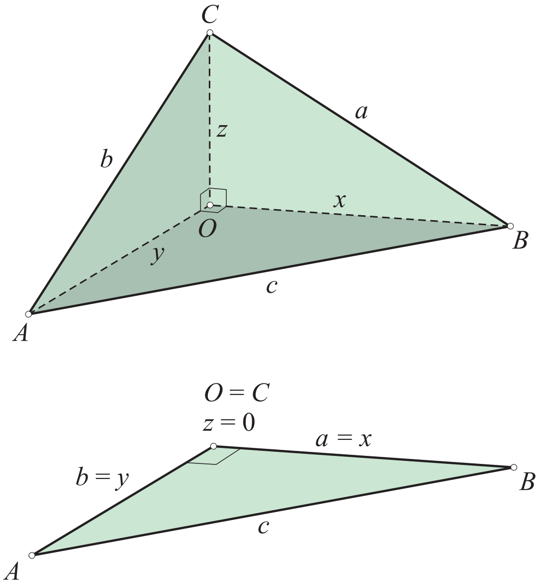
$$y^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \quad \text{te} \quad z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Sada izvodimo samu formulu (1):

$$P^2_{\triangle ABC} = \left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \left(\frac{xz}{2}\right)^2 + \left(\frac{yz}{2}\right)^2$$

$$P^2 = \frac{x^2y^2}{4} + \frac{x^2z^2}{4} + \frac{y^2z^2}{4}$$
$$= \frac{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}{4}$$
$$P = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}.$$

U prvi se mah čini da formula (1) vrijedi samo za šiljastokutne trokute, jer se u izvodu formule polazi od pretpostavke da su bridovi x, y i z pravokutnog tetraedra pozitivni realni brojevi. Iz toga razloga trokut ABC ne može biti drukčiji nego šiljastokutan, što se može lako i dokazati. No vidjeli smo u primjerima 2 i 3 da ona vrijedi i za pravokutne i za tupokutne trokute. Dakle, ona je opća formula za računanje površine trokuta. Pogledajmo zašto se s pomoću nje mogu izračunavati površine i pravokutnih i tupokutnih trokuta.



Slika 5.

Zamislimo da se bridu z na slici 5 postupno smanjuje duljina, dok duljine bridova x i y ostaju nepromijenjene. U tom se slučaju smanjuju duljine stranica a i b trokuta ABC, dok stranici c duljina ostaje ista. Iz tog razloga veličina kuta γ se postupno povećava $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Kada z postane nula, $z = 0$, tada je $y = b$ i $x = a$, kut γ postaje pravi kut, a pravokutni tetraedar prelazi u pravokutni trokut AOB. Pravokutni trokut AOB možemo smatrati posebnim slučajem pravokutnog tetraedra kod kojega su duljine bridova x i y pozitivni realni brojevi, a $z = 0$. Trokut ABC se poklopio s trokutom AOB što znači da je i trokut ABC pravokutan. Pokažimo da formula (1) vrijedi za takav trokut.

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + x^2 \cdot 0 + y^2 \cdot 0} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2} = \frac{xy}{2}. \end{aligned}$$

Kako je $x = a$ i $y = b$, imamo $P = \dfrac{ab}{2}$.

Daljnjim skraćivanjem duljina stranica a i b trokuta ABC, kut među njima postaje tupi kut, odnosno trokut ABC postaje tupokutan, dok brid z, pravokutnog tetraedra, poprima imaginarnu duljinu. Više o ovome govorit ćemo u zadnjem dijelu ovoga priloga.

Izvod formule (2)

Iz formule (1) možemo izvesti još jednu formulu koja se može primjenjivati samostalno, a može i u kombinaciji s formulom (1), sve u cilju pojednostavljivanja izračunavanja površine. To radimo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{m}{2} \\ y^2 &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{n}{2} \\ z^2 &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{p}{2} \\ P &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2}\cdot\frac{n}{2} + \frac{m}{2}\cdot\frac{p}{2} + \frac{n}{2}\cdot\frac{p}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mn}{4} + \frac{mp}{4} + \frac{np}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{mn + mp + np}{4}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{mn + mp + np}, \end{aligned} \tag{2}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} m &= a^2 + c^2 - b^2 \\ n &= b^2 + c^2 - a^2 \\ p &= a^2 + b^2 - c^2. \end{aligned}$$

Lijeve strane ovih triju jednakosti mogu međusobno mijenjati mjesta, isto tako i desne, pa ne moramo na to paziti, što računanje površine čini bržim i jednostavnijim. Ako primjenjujemo formulu (2) također možemo, tijekom računanja površine, saznati o kojoj se vrsti trokuta radi.

- Ako su: $m > 0$, $n > 0$ i $p > 0$, trokut je šiljastokutan.
- Ako su: $m > 0$, $n > 0$ i $p = 0$, trokut je pravokutan.
- Ako su: $m > 0$, $n > 0$ i $p < 0$, trokut je tupokutan.

Slično kao i kod formule (1), ni ovdje ne mora strogo biti $p = 0$, odnosno $p < 0$ da bi trokut ABC bio pravokutan, odnosno tupokutan. Važno je samo da jedna od veličina m, n ili p to bude.

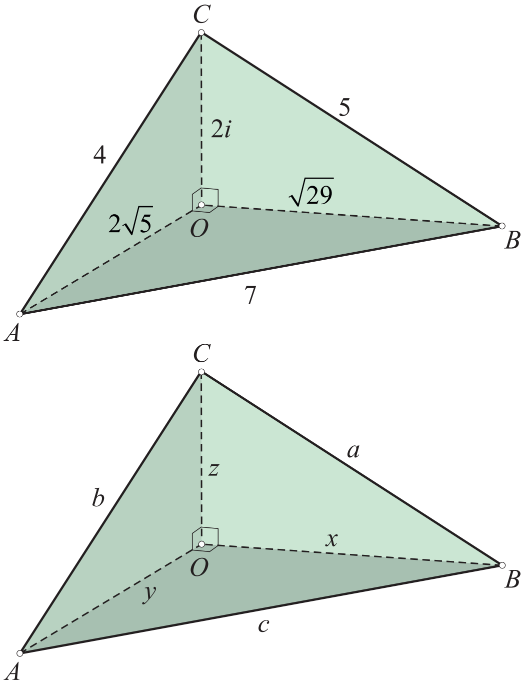
Jedna zanimljivost

Vratimo se na osnovnu ideju cijele ove "priče", a ta je da bilo koji trokut ABC možemo promatrati kao plohu nekog pravokutnog tetraedra. Pritom imamo sljedeće slučajeve:

- Ako je trokut ABC šiljastokutan, dobije se stvaran pravokutni tetraedar kod kojeg su duljine bridova x, y i z pozitivni realni brojevi.
- Ako je trokut ABC pravokutan, tada je $x = a$, $y = b$, a $z = 0$, to jest tetraedar prelazi u trokut ABC.
- Ako je trokut ABC **tupokutan**, tada dobijemo **imaginarni pravokutni tetraedar**, kod kojega su duljine bridova x i y pozitivni realni brojevi, a duljina brida z je imaginarna. Zbog toga su dva od tri pravokutna trokuta, koji su ujedno i plohe toga tetraedra, **imaginarni pravokutni trokuti**.

Treći slučaj možemo pokazati na sljedeći način. Promatrajmo trokut ABC iz Primjera 3 kod kojeg su duljine stranica $a = 5$, $b = 4$ i $c = 7$. Znamo da je taj trokut tupokutan i da mu je površina $P = 4\sqrt{6}$. Ponovno ćemo izračunati njegovu površinu, ali ne koristeći se direktno formulom (1), već promatranjem ovoga trokuta kao plohe nekog pravokutnog tetraedra (slika 6).

$$x = \sqrt{\frac{49+25-16}{2}} = \sqrt{\frac{58}{2}} = \sqrt{29}$$
$$y = \sqrt{\frac{49+16-25}{2}} = \sqrt{\frac{40}{2}} = 2\sqrt{5}$$
$$z = \sqrt{\frac{25+16-49}{2}} = \sqrt{-4} = 2i.$$



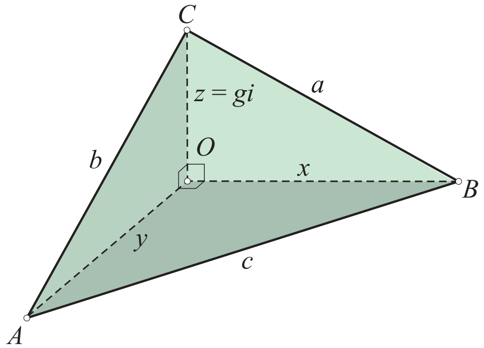
Slika 6.

Sada izračunajmo površinu trokuta ABC:

$$P^2_{\triangle ABC} = P^2_{\triangle AOB} + P^2_{\triangle AOC} + P^2_{\triangle BOC}$$
$$P^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{29}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}\cdot 2i}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{29}\cdot 2i}{2}\right)^2$$
$$= 5\cdot 29 + 5\cdot(-4) + 29\cdot(-1)$$
$$= 145 - 20 - 29 = 96$$

$$P = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Općenito, neka su duljine bridova x i y pravokutnog tetraedra pozitivni realni brojevi, a duljina brida z imaginarna, $z = gi$ (slika 7). U tom je slučaju trokut ABC tupokutan. Pokažimo da formula (1) vrijedi i za ovakve duljine bridova x, y, i z.



Slika 7.

$$P^2_{\triangle ABC} = \left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\cdot gi}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\cdot gi}{2}\right)^2$$
$$= \frac{x^2\cdot y^2}{4} + \frac{x^2\cdot(gi)^2}{4} + \frac{y^2\cdot(gi)^2}{4}$$
$$P = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + x^2(gi)^2 + y^2(gi)^2}.$$

Kako je $z = gi$, imamo

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2},$$

ili drukčije

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 - x^2g^2 - y^2g^2}.$$

Ovdje je važno napomenuti da pravokutni trokut AOB ima veću površinu od trokuta ABC kada su duljine bridova x i y pozitivni realni brojevi, a duljina brida z je imaginarna.

LITERATURA

1/ M. Pavleković (2001.): *Metodika nastave matematike s informatikom I.*, str. 64–65, Element, Zagreb.