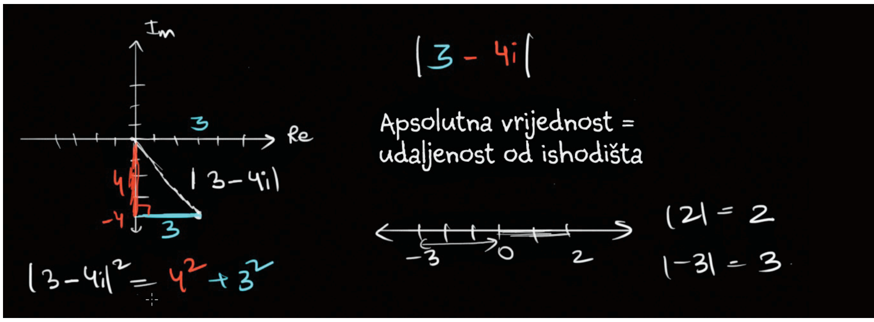
Geometrijski pristup

zadatcima s apsolutnom vrijednošću

Ivana Valentić, Zagreb



Apsolutna vrijednost prvi se puta spominje u 6. razredu osnovne škole dok se u 1. razredu srednje škole rade jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnom vrijednošću. Klasičan pristup tim zadatcima je promatranje slučajeva ovisno o predznaku izraza pod apsolutnom vrijednošću. U ovom članku nudimo alternativni način za rješavanje dijela zadataka koji nudi geometrijsko, odnosno vizualno razumijevanje pojma apsolutne vrijednosti.

Apsolutna vrijednost kao metrika

U ovom pristupu izraz $|x-y|$ interpretiramo kao udaljenost realnih brojeva x i y. Već iz ove jednostavne tvrdnje možemo lagano zaključiti neka svojstva apsolutne vrijednosti:

- Budući da je $|x| = |x-0|$, zaključujemo da je $|x|$ udaljenost realnog broja x od 0.
- Budući da je udaljenost nenegativna vrijednost, zaključujemo da isto vrijedi i za apsolutnu vrijednost.
- Budući da je udaljenost realnog broja x od realnog broja y jednaka udaljenosti realnog broja y od realnog broja x, zaključujemo da je $|x-y| = |y-x|$.

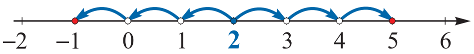
Koristeći se ovom interpretacijom riješimo nekoliko jednostavnih zadataka.

Zadatak 1. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi

a) $|x-2| = 3$, **b)** $|x-3| < 2$, **c)** $|x+1| \geq 2$.

Rješenje.

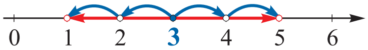
a) Budući da je $|x-2|$ udaljenost broja x i broja 2, u zadatku se traže oni realni brojevi x čija je udaljenost od broja 2 jednaka 3, odnosno oni realni brojevi x koji su od 2 udaljeni za 3. Prikažimo to na brojevnom pravcu.



Od broja 2 pomičemo se ulijevo i udesno za 3 i dolazimo do dva rješenja zadatka, a to su $x_1 = -1$ i $x_2 = 5$.

b) Budući da je $|x-3|$ udaljenost broja x i broja 3, u zadatku se traže oni realni brojevi x čija je udaljenost od broja 3 manja od 2, odnosno oni realni brojevi x koji su od 3 udaljeni za manje od 2. Prikažimo to na brojevnom pravcu.

Ivana Valentić, mag. math., PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, `ivana.valentic@math.hr`



Od broja 3 pomičemo se ulijevo i udesno za 2 i budući da tražimo one x koji su od 3 udaljeni za **manje** od 2, dobivamo da je rješenje zadatka svaki x iz otvorenog intervala $\langle 1, 5\rangle$.

c) Budući da smo dali geometrijsku interpretaciju jedino izraza oblika $|x - y|$, potrebno je izraz $|x + 1|$ transformirati u takav oblik. Budući da je $1 = -(-1)$, odnosno budući da je $|x + 1| = |x - (-1)|$, zaključujemo da se u zadatku traže oni realni brojevi x čija je udaljenost od broja -1 veća od ili jednaka 2, odnosno oni realni brojevi x koji su od -1 udaljeni za 2 ili više. Prikažimo to na brojevnom pravcu.

Od broja -1 pomičemo se ulijevo i udesno za 2 i budući da tražimo one x koji su od -1 udaljeni za **2 ili više** dobivamo da je rješenje zadatka svaki x iz unije zatvorenih intervala $\langle -\infty, -3] \cup [1, \infty\rangle$.

Zadatak 1 je možda imao vrlo jednostavne primjere, ali oni su bitni za razvijanje intuicije učenika o pojmu apsolutne vrijednosti. Ako se svaki, pa i najjednostavniji zadatak, čita u terminima udaljenosti i crta na brojevnom pravcu, učenik će uistinu razumjeti ovaj pojam i njegova svojstva.

Pokažimo kako se malo složeniji zadatci mogu svesti na oblik pogodan za interpretaciju s pomoću udaljenosti.

Zadatak 2. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi

a) $2\,|x - 2| = 4,$ **b)** $|3x - 3| < 6.$

Rješenje.

a) Dijeljenjem jednadžbe sa 2 dobivamo jednadžbu $|x - 2| = 2$, koja ima traženi oblik.

b) Ovaj se podzadatak isprva može činiti vrlo sličan zadatku pod a), ali tu treba biti vrlo oprezan. Ako učenici zapamte da se 3 može "izlučiti" iz apsolutne vrijednosti, odnosno da vrijedi $|3x - 3| = 3\,|x - 1|$, mogli bi krivo zaključiti da bi se isto moglo napraviti i s negativnim faktorom. Bilo bi dobro organizirati aktivnost gdje bi učenici usporedili udaljenost realnog broja ax od 0 te udaljenost realnog broja x od 0 za različite vrijednosti realnog faktora a. Nakon ovakve aktivnosti dobro je svaki puta ponovno podsjetiti da je apsolutna vrijednost udaljenost, koja je nenegativan realan broj, pa nikako ne može vrijediti $|-3x - 3| = -3\,|x + 1|$.

Ovom metodom mogu se riješiti i teži zadatci.

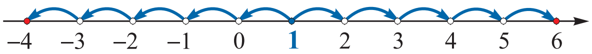
Zadatak 3. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi

a) $||x - 1| - 2| = 3,$ **b)** $|x - 2| = |x - 4|,$

c) $\dfrac{|x - 3|}{|x - 1|} > 1.$

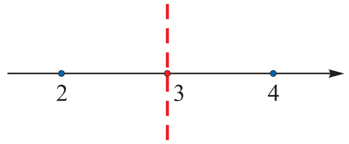
Rješenje.

a) Uočimo da izraz $||x - 1| - 2|$ predstavlja udaljenost realnog broja $|x - 1|$ i realnog broja 2. Zbog jednostavnosti uvedimo supstituciju $y := |x - 1|$. Sada želimo odrediti y čija je udaljenost od broja 2 jednaka 3, pa kao u *Zadatku 1a)* dio dobivamo dva rješenja $y_1 = -1$ i $y_2 = 5$. Vratimo prvo rješenje u supstituciju i dobivamo jednadžbu $|x - 1| = -1$, a kako udaljenost dvaju realnih brojeva ne može biti negativna, odmah zaključujemo da ova jednadžba nema realnih rješenja. Vratimo drugo rješenje u supstituciju i dobivamo jednadžbu $|x - 1| = 5$. Tražimo one realne brojeve x čija je udaljenost od broja 1 jednaka 5, odnosno one realne brojeve x koji su od 1 udaljeni za 5. Prikažimo to na brojevnom pravcu.



Od broja 1 pomičemo se ulijevo i udesno za 5 i dolazimo do dva rješenja zadatka, a to su $x_1 = -4$ i $x_2 = 6$.

b) Izraz $|x - 2|$ ima geometrijsku interpretaciju udaljenosti broja x i broja 2, a izraz $|x - 4|$ udaljenosti broja x i broja 4. Iz toga zaključujemo da tražimo one realne brojeve x čija je udaljenost od 2 jednaka udaljenosti od 4, odnosno one realne brojeve x koji su jednako udaljeni od brojeva 2 i 4.

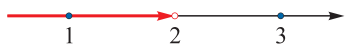


Geometrijski ovaj problem znamo riješiti i u ravnini i njegovo je rješenje simetrala dužine čiji su rubovi u 2 i 4, ali budući da nas zanimaju samo realni brojevi x, jedino je rješenje polovište te dužine, odnosno $x = 3$.

c) Postavimo prvo uvjete na x. Budući da se izraz $|x-1|$ nalazi u nazivniku, mora vrijediti $|x-1| \neq 0$. To znači da x ne smije biti od 1 udaljen za 0, odnosno x ne smije biti 1.

Sada nejednadžbu možemo pomnožiti sa $|x-1|$ (jer je udaljenost nenegativna, a već smo komentirali da taj izraz ne smije biti jednak 0) i dobivamo nejednadžbu $|x-3| > |x-1|$.

Izraz $|x-3|$ ima geometrijsku interpretaciju udaljenosti broja x i broja 3, a izraz $|x-1|$ udaljenosti broja x i broja 1. Iz toga zaključujemo da tražimo one realne brojeve x čija je udaljenost od 3 veća nego njegova udaljenost od 1, odnosno one realne brojeve x koji su bliže broju 1 nego broju 3.



Prikažimo to na brojevnom pravcu. Kao i u a) podzadatku zaključujemo da je 2 jednako udaljen od 1 i 3, ali budući da tražimo one x koji su **bliže** broju 1 nego broju 3, dobivamo da je x iz otvorenog intervala $\langle -\infty, 2\rangle$. Potrebno se još prisjetiti da smo ranije zaključili kako x ne smije biti 1, pa dobivamo konačno rješenje $x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$.

U *Zadatku 3* podzadatcima b) i c) koristili smo se poznatom činjenicom da je geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od dviju fiksnih točaka simetrala dužine kojoj su krajnje točke upravo te dvije fiksne. Sljedeći zadatak može se također riješiti koristeći se interpretacijom apsolutne vrijednosti preko metrike, ali više se nećemo moći pozvati na poznate tvrdnje, pa će biti nužna malo detaljnija analiza.

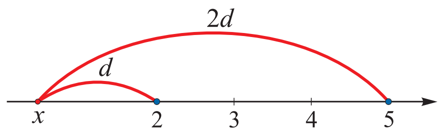
Zadatak 4. Odredite sve realne brojeve x za koje vrijedi

a) $|x-5| = 2\,|x-2|$, **b)** $|x-2| + |x-5| = 5$,
c) $|x-2| + |x-5| = 3$.

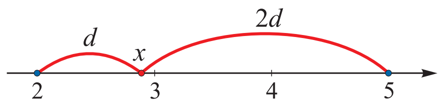
Rješenje.

a) Izraz $|x-5|$ ima geometrijsku interpretaciju udaljenosti broja x i broja 5, a izraz $|x-2|$ udaljenosti broja x i broja 2. Iz toga zaključujemo da tražimo one realne brojeve x čija je udaljenost od 5 jednaka dvostrukoj udaljenosti od 2, odnosno one realne brojeve x koji su dvostruko bliži broju 2 nego 5. Zbog jednostavnijeg zapisa označimo udaljenost broja x i broja 2 sa d. Tada je $2d$ udaljenost broja x i broja 5.

Analizirajmo odvojeno slučajeve kada je $x < 2$, $x \in [2,5]$ i $x > 5$. Prikažimo prvi slučaj na brojevnom pravcu.



Iz slike se jasno vidi da mora vrijediti jednakost $2d = d + 3$ iz čega dobivamo da je $d = 3$. Ponovno iz iste slike zaključujemo da je onda $x = 2 - 3 = -1$. Ovime je prvi slučaj riješen. Prikažimo sada drugi slučaj na brojevnom pravcu.



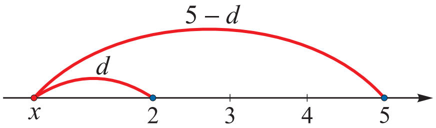
Iz slike se jasno vidi da mora vrijediti jednakost $2d + d = 3$ iz čega dobivamo da je $d = 1$. Ponovno iz iste slike zaključujemo da je onda $x = 2 + 1 = 3$. Ovime je i drugi slučaj riješen.

Uočimo da u trećem slučaju nema rješenja, jer su svi $x > 5$ (odnosno oni koji se na pravcu nalaze desno od 5) bliže broju 5 nego broju 2, a onda je nemoguće da takav x bude dvostruko bliži broju 2 nego 5.

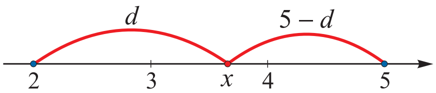
Konačno zaključujemo da jednadžba $|x-5| = 2\,|x-2|$ ima dva rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$.

b) Izraz $|x-2|$ ima geometrijsku interpretaciju udaljenosti broja x i broja 2, a izraz $|x-5|$ udaljenosti broja x i broja 5. Iz toga zaključujemo da tražimo one realne brojeve x čiji je zbroj udaljenosti od 2 i 5 jednak 5. Zbog jednostavnijeg zapisa označimo udaljenost broja x i broja 2 sa d. Tada je udaljenost broja x i broja 5 dana sa $5-d$.

Kao i u prošlom podzadatku analizirajmo odvojeno slučajeve kada je $x<2$, $x\in[2,5]$ i $x>5$. Prikažimo prvi slučaj na brojevnom pravcu.

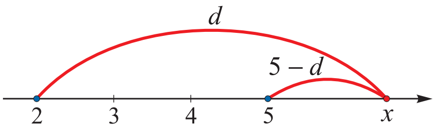


Iz slike se jasno vidi da mora vrijediti jednakost $5-d=d+3$ iz čega dobivamo da je $d=1$. Ponovno iz iste slike zaključujemo da je onda $x=2-1=1$. Ovime je prvi slučaj riješen. Prikažimo sada drugi slučaj na brojevnom pravcu.



Iz slike se u ovom slučaju vidi da mora vrijediti jednakost $5-d+d=3$, što nije moguće, pa zaključujemo da ovaj slučaj nema rješenja.

Prikažimo i treći slučaj na brojevnom pravcu.



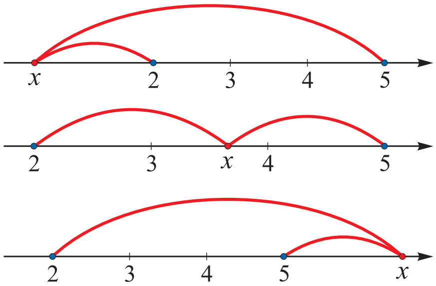
Iz slike se vidi da mora vrijediti jednakost $d=5-d+3$ iz čega dobivamo da je $d=4$. Ponovno iz iste slike zaključujemo da je onda $x=2+4=6$. Ovime je treći slučaj riješen.

Konačno zaključujemo da jednadžba $|x-2|+|x-5|=5$ ima dva rješenja $x_1=1$ i $x_2=6$.

c) Izraz s lijeve strane interpretiramo isto kao u prošlom podzadatku i zaključujemo da tražimo one realne brojeve x čiji je zbroj udaljenosti od 2 i 5 jednak 3.

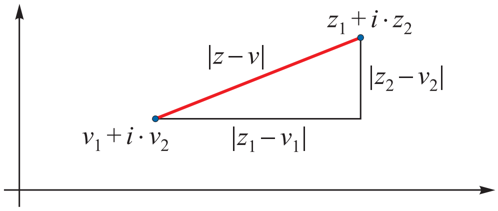
Analizirajmo odvojeno slučajeve kada je $x<2$, $x\in[2,5]$ i $x>5$. Uočimo da u prvom i trećem slučaju nema rješenja. To vrijedi jer je udaljenost brojeva 2 i 5 jednaka 3, pa će u prvom slučaju već udaljenost x od 5, a u trećem x od 2 biti veća od traženih 3. Također uočimo da svaki x iz drugog slučaja zadovoljava traženu jednakost jer je u tom slučaju zbroj udaljenosti x od 2 i 5 jednak udaljenosti 2 od 5, što je 3.

Sva tri slučaja možemo ponovno zornije prikazati na brojevnom pravcu. Konačno zaključujemo da jednadžba $|x-2|+|x-5|=3$ ima beskonačno mnogo rješenja $x\in[2,5]$.



U 2. razredu se uvode, a u 4. razredu nadopunjuje znanje kompleksnih brojeva. Uz kompleksne brojeve se ponovno veže pojam apsolutne vrijednosti, koji se u tom slučaju često zove i modul kompleksnog broja. To je pojam koji učenicima može stvarati probleme, ali njegovo se razumijevanje može olakšati postavljanjem dobrih temelja u 1. razredu kada se isti uvodi u slučaju realnih brojeva. Uočimo da i u slučaju kompleksnih brojeva imamo istu interpretaciju i ista svojstva, kao i u slučaju realnih brojeva.

Izraz $|z-v|$ interpretiramo kao udaljenost kompleksnih brojeva $z=z_1+i\cdot z_2$ i $v=v_1+i\cdot v_2$. Iz skice se primjenom Pitagorina poučka (ili primjenom ranije izvedene formule za udaljenost točaka



u koordinatnom sustavu) dobiva poznata formula

$$|z - v|^2 = |z_1 - v_1|^2 + |z_2 - v_2|^2 .$$

Ponovno možemo lagano zaključiti neka svojstva apsolutne vrijednosti:

- Budući da je $|z| = |z - 0|$, zaključujemo da je $|z|$ udaljenost kompleksnog broja z od 0.
- Budući da je udaljenost nenegativna vrijednost, zaključujemo da isto vrijedi i za apsolutnu vrijednost.
- Budući da je udaljenost kompleksnog broja z od kompleksnog broja v jednaka udaljenosti kompleksnog broja v od kompleksnog broja z, zaključujemo da je $|z - v| = |v - z|$.

Koristeći se ovom interpretacijom riješimo još jedan zadatak.

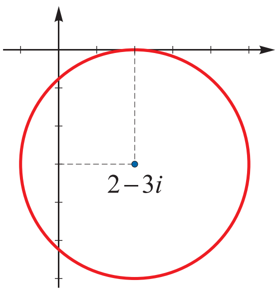
Zadatak 5. Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

a) $|z - 2 + 3i| = 3$, b) $|z - 2 + 3i| > |z - 4 + 3i|$.

Rješenje.

a) Zapišimo izraz $|z - 2 + 3i|$ u obliku pogodnijem za primjenu geometrijske interpretacije.
$|z - 2 + 3i| = |z - (2 - 3i)|$ ima geometrijsku interpretaciju udaljenosti kompleksnog broja z i $2 - 3i$. To znači da u zadatku tražimo one kompleksne brojeve z koji su od točke $2 - 3i$ udaljeni za točno 3.

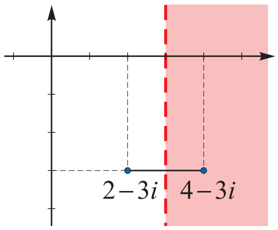
Uočimo da je u ovoj interpretaciji učeniku dovoljno poznavanje definicije kružnice kako bi prepoznao rješenje ovog zadatka. Da smo u rješenju krenuli "standardnim" analitičkim pristupom, od učenika bi



se zahtijevalo da poznaje i jednadžbu kružnice u ravnini, što je puno naprednije predznanje.

Konačno zaključujemo da jednadžba $|z - 2 + 3i| = 3$ ima beskonačno mnogo rješenja $z \in$ kružnice sa središtem u $2 - 3i$, polumjera 3.

b) Izraz $|z - 2 + 3i| = |z - (2 - 3i)|$ ima geometrijsku interpretaciju udaljenosti broja z i broja $2 - 3i$, a izraz $|z - 4 + 3i| = |z - (4 - 3i)|$ udaljenosti broja z i broja $4 - 3i$. Iz toga zaključujemo da tražimo one kompleksne brojevi z čija je udaljenost od $2 - 3i$ veća od udaljenosti od $4 - 3i$, odnosno one kompleksne brojeve z koji su bliži broju $4 - 3i$ nego broju $2 - 3i$.



Kao što smo ranije komentirali, u slučaju jednakosti ovaj problem znamo riješiti geometrijski. Njegovo je rješenje simetrala dužine čiji su rubovi u $2 - 3i$ i $4 - 3i$. Budući da nas zanimaju oni kompleksni brojeve z koji su **bliži** broju $4 - 3i$, nego broju $2 - 3i$, rješenje će biti poluravnina koja sadrži točku $4 - 3i$, a omeđena je tom simetralom, kao na slici.

Konačno zaključujemo da jednadžba $|z - 2 + 3i| > |z - 4 + 3i|$ ima beskonačno mnogo rješenja $z = z_1 + i \cdot z_2$ za koja vrijedi $z_1 > 3$.

* * *

Kroz ovih nekoliko primjera već se može naslutiti velika korist geometrijske vizualizacije pojma apsolutne vrijednosti. Interpretacija apsolutne vrijednosti s pomoću metrike ima naravno i veliku teorijsku važnost, jer su pojmovi metrike i metričkih prostora puno općenitiji od apsolutne vrijednosti na skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Tu općenitost naravno nije moguće svim učenicima objasniti, ali je svakako za njih bolje da razvijaju način razmišljanja koji ima dublju, općenitiju pozadinu. Ta je pozadina naravno i razlog zašto smo isti način razmišljanja mogli primijeniti i za realne i za kompleksne brojeve.