Geometrija vukovarskog vodotornja

Predrag Novaković
i Marijana Kovačić, Vukovar

Namjera je autora ovoga rada prikazati podlogu i primjenu matematike, prije svega geometrije, u oblikovanju životnoga prostora i svijeta oko nas. Ovaj rad može poslužiti i kao ideja i kao izvor podataka za projektni zadatak u nastavi matematike u srednjim školama.

Uvod

Koliko god bilježi povijest ljudskog postojanja, čovjek je svojim radom i umom utjecao na svijet oko sebe. To čini i danas, a svjedoci su gradovi i naselja, prometnice, tuneli i mostovi, obrađena polja i uređeni vodotokovi i drugo. Ponekad djela ljudskih ruku i uma svojom ljepotom, veličinom ili oblikom nadilaze svoju osnovnu namjenu i postaju "nešto više", kao što su npr. Big Ben u Londonu, Eiffelov toranj u Parizu ili pješački most u Osijeku.

I vukovarski vodotoranj je već 1968. godine svojom pojavom dao naslutiti da neće biti samo vodotoranj sa spremištem za vodu.

Osnovni podatci

O osnovnim obilježjima i podatcima vodotornja vrlo malo se zna[1]. Prema dostupnim podatcima navedenog izvora vukovarski vodotoranj izgradila je zagrebačka tvrtka "Hidrotehna" prema projektu[2] tvrtke "Plan" 1968. godine. Sam vodotoranj visok je ukupno 50.3 m (sa stožastim vrhom), a kapacitet spremnika je 2200 m^3. Pokazat će se da je uz poznavanje i primjenu matematike i geometrije i ovo sasvim dovoljno za određivanje približne jednadžbe hiperbole.

Geometrija objekta

Od mnoštva slika poželjno je odabrati, prije svega, korisne slike, a to su slike s pročelja, dovoljne udaljenosti i okomitog pogleda na objekt da bi se umanjile devijacije zbog kuta gledanja i perspektive, kao što prikazuje slika 1.

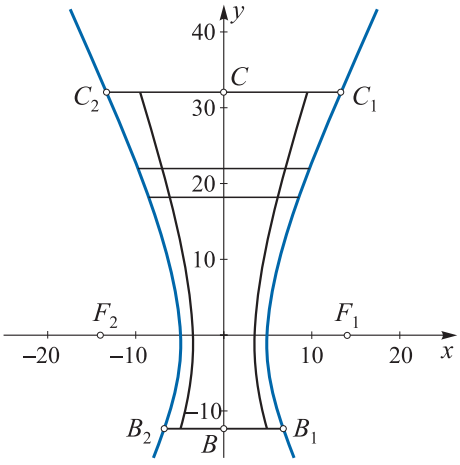
Dobrom oku ne može promaći hiperbola, jedna od krivulja drugoga reda (konike ili čunjosječnice) dobivena uzdužnim presjekom tornja, kao najbolja i najjednostavnija aproksimacija vanjskog oblika vodotornja, kao što prikazuje slika 2.

Predrag Novaković, profesor matematike i fizike, Tehnička škola Nikole Tesle, Vukovar, predrag.novakovic1507@gmail.com
Marijana Kovačić, profesorica matematike i informatike, Tehnička škola Nikole Tesle, Vukovar, k1.marijana@gmail.com

[1] Preuzeto s http://hr.wikipedia.org/wiki/Vukovarski_vodotoranj

[2] Petar Kušan (Zagreb, 1932. – Zagreb, 2008.), hrvatski arhitekt
Matej Meštrić (Presečno, 1932. –), hrvatski arhitekt

Slika 1.



Slika 2.

Definicija 1. Hiperbola je skup svih točaka ravnine za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dvije zadane fiksne točke (žarišta hiperbole) te ravnine stalna.

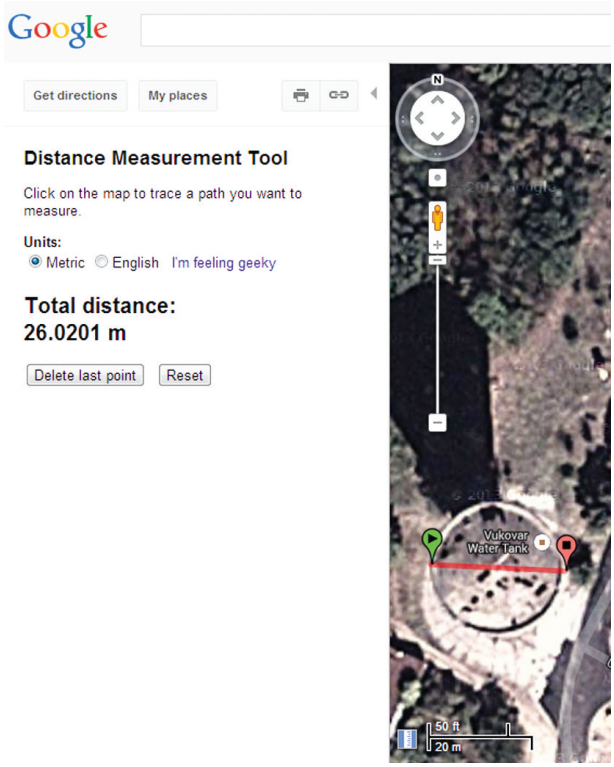
Definicija 2. Hiperbola je presjek stožaste plohe i ravnine usporedne s osi stožaste plohe.

Kako hiperbola može biti određena na više načina (primjerice, s pomoću 5 različitih točaka, dvama žarištima i jednom točkom itd.), da bi se dobio egzaktan oblik njezine jednadžbe, potrebno je odrediti najpogodniji način za danu situaciju. U ovom slučaju koriste se poznate dvije različite točke B_1 i C_1 uz uvjet da je sjecište asimptota u središtu koordinatnog sustava, ili jednostavnije rečeno da je hiperbola "centrirana".

Približno određivanje jednadžbe hiperbole

Prvo je potrebno doći do korisnih podataka, a to su koordinate točaka B_1 i C_1 sa slike 2. Za ovaj prvi korak poslužila je satelitska snimka[3] vodotornja u najvećem raspoloživom povećanju kako je prikazano na slici 3. Naznačena udaljenost na satelitskoj snimci je 26.4 m iz čega su x-koordinate točaka C_1 i C_2

$$x_{C_{1,2}} = \pm 13.2 \text{ m}.$$



Slika 3.

[3] korištena usluga aplikacije Google Maps

Za određivanje x-koordinata točaka B_1 i B_2 treba iskoristiti činjenicu da je baza vodotornja pravilan osmerokut čija je stranica lako mjerljiva u samom podnožju vodotornja i iznosi 5.3 m. Tada duljina dijagonale osmerokuta, što je ujedno udaljenost točaka B_1 i B_2, iznosi 13.8 m pa su x-koordinate točaka B_1 i B_2

$$x_{B_{1,2}} = \pm 6.9 \text{ m}$$

Visinu točke O (isto tako i visinu samog tornja) može se dobiti s pomoću zrcala, mjerne vrpce i sličnosti trokuta, jednostavnim postupkom koji uspješno usvajaju učenici 7. razreda osnovne škole. Visina točke O iznosi približno 13.2 m, a vodotornja bez stožastog dijela 47.8 m. Iz ovih podataka za y-koordinate traženih točaka dobije se $B_1 = (6.9, -13.2)$ i $C_1 = (13.3, 34.6)$. Uvrštavanjem koordinata točaka u opći oblik jednadžbe hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dobiju se dvije jednadžbe s dvjema nepoznanicama

$$47.6b^2 - 174.2a^2 = a^2b^2$$
$$176.9b^2 - 1197.2a^2 = a^2b^2$$

čija rješenja daju približnu jednadžbu tražene hiperbole

$$\frac{x^2}{5.1^2} - \frac{y^2}{14.2^2} = 1.$$

Nadalje, kako je hiperbola određena svojom jednadžbom, do preostalih osnovnih podataka nije teško doći iz dobivenog analitičkog oblika:

realna poluos	$a = 5.1$
imaginarna poluos	$b = 14.2$
koordinate tjemena	$(5.1, 0);\ \ (-5.1, 0)$
linearni ekscentricitet	$e = \sqrt{227.65} \approx 15.1$
žarišta	$F_1 = (15.1, 0);$ $F_2 = (-15.1, 0)$
numerički ekscentricitet	$\varepsilon = \sqrt{\frac{227.65}{26.01}} = \sqrt{8.75} \approx 3$
direktrise	$d_1 = 1.7;\ \ d_2 = -1.7$
poluparametar	$p = 39.5$

Zanimljivi podatci o vukovarskom vodotornju

Podatak 1. Promjer vodotornja u najužem dijelu je 10.2 m.

Podatak 2. Omjer poluosi hiperbole. Realna a i imaginarna b poluos hiperbole sadržane su u samoj analitičkoj jednadžbi hiperbole te je njihov omjer

$$\frac{b}{a} = \frac{14}{5} = 2.8.$$

Podatak 3. Omjer visine (bez stožastog nastavka) i širine vodotornja približno je 1.8. Kako je visina tornja udaljenost od točke $B = (0, -13.3)$ do točke $C = (0, 34.6)$, a širina je 26.6 m, traženi omjer je

$$\frac{|BC|}{|C_1C_2|} \approx 1.8.$$

Podatak 4. Vukovarski vodotoranj je rotacijski hiperboloid. Rotacijom hiperbole oko y-osi (imaginarne osi) za kut 2π dobije se zakrivljena ploha u prostoru xyz koja se naziva jednokrilni rotacijski hiperboloid. Za skicu hiperboloida u programu dinamičke geometrije ili grafičkog kalkulatora (vidi sliku 4) potrebna je jednadžba

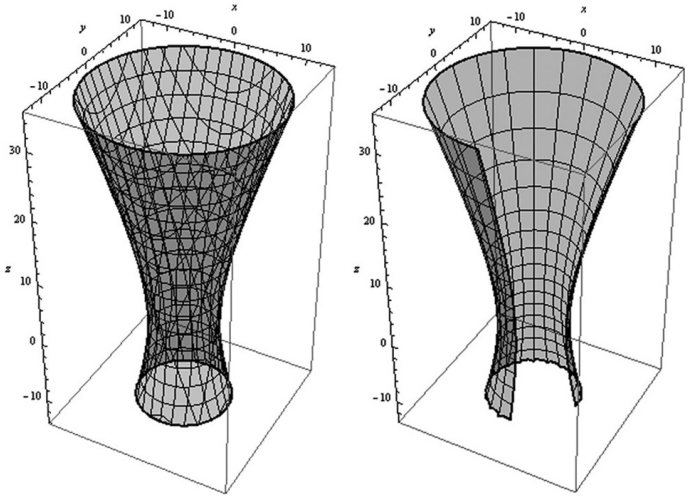
$$\frac{x^2}{5.1^2} + \frac{y^2}{5.1^2} - \frac{z^2}{14.2^2} = 1 \qquad \begin{array}{l} -13.3 \le x \le 13.3 \\ -13.3 \le y \le 13.3 \\ -13.2 \le z \le 34.6 \end{array}$$

Podatak 5. Približni obujam vukovarskog vodotornja može se odrediti kao obujam jednokrilnog rotacijskog hiperboloida, jer se hiperboloid dobije rotacijom grane hiperbole $f(y)$, a onda se obujam dobije iz integrala:

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} [f(y)]^2 \, dy$$

i uvrštavanjem pripadnih granica integracije dobije se

$$V_y = \pi \int_{-13.2}^{34.6} \left[5.1\sqrt{1 + \frac{y^2}{14.2^2}}\right]^2 dy \approx 9811.8 \text{ m}^3.$$



Slika 4.

Podatak 6. Zorniji prikaz veličine obujma vukovarskog vodotornja predstavljaju sljedeći ekvivalenti:

- obujam kocke stranice 21.4 m;
- obujam kugle polumjera 13.3 m;
- obujam stožaste hrpe suhog pijeska[4] široke 48 m i visoke 16.2 m;
- 122 vagon-cisterne[5], svaka obujma 80 m^3, što čini kompoziciju vagona dugačku 2091 m;
- nepuna 4 olimpijska bazena (duljina 50 m, širina 25 i dubina 2 m);
- za napuštanje Zemljine orbite, raketni motori Saturn V trostupanjske rakete Apollo[6], koja je bila na Mjesecu, potrošili su 3 583 030 l tekućeg raketnog goriva (kerozin i tekući kisik u prvom stupnju, a tekući vodik i kisik u drugom i trećem stupnju), što iznosi približno 37 % obujma vodotornja;
- količina vode protekla Dunavom kroz Vukovar za 3.4 s (godišnji prosjek protoka Dunava kroz Vukovar 2895 $\frac{m^3}{s}$), ili količina vode protekla Dravom kroz Osijek za 17.8 s (godišnji prosjek protoka Drave kroz Osijek 550 $\frac{m^3}{s}$);
- volumen zraka koji prosječan čovjek disanjem[7] potroši za 1 635 300 min, odnosno za 27 255 sati ili 1135.6 dana ili 37.8 mjeseci ili malo više od 3 godine.

Zaključak

Na ovom jednostavnom primjeru vukovarskog vodotornja prikazani su moć, korist i ljepota matematike. Polazeći od samo jedne informacije, visine vodotornja i jedne slike te predviđenih srednjoškolskih učeničkih kompetencija, moguće je odrediti mnoštvo drugih podataka i puno bolje upoznati vanjsku, ali i unutarnju ljepotu jedne građevine koja je samim svojim nastankom postala simbolom jednog grada.

Između ostalog, intencija ovog zadatka je i popularizacija matematike među učenicima srednjih škola i studentima prirodnih i tehničkih fakulteta, kao i intenzivnija primjena projektne nastave matematike.

LITERATURA

1/ I. N. Bronštejn i suradnici (2004.): *Matematički priručnik*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb.

2/ B. Dakić, N. Elezović (2014.): *Matematika 3, 2. dio, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Element, Zagreb.

3/ S. Kurepa (1984.): *Matematička analiza I*, Tehnička knjiga, Zagreb.

4/ S. Lang (1986.): *A First Course in Calculus*, Springer, New York.

5/ `http://mathworld.wolfram.com/Hyperbola.html`

[4] nagib mirovanja za suhi pijesak je 34° (ovisi o vrsti pijeska, zrnatosti, suhoći, trenju između zrnaca...)

[5] proizvođač Đuro Đaković – specijalna vozila, Slavonski Brod

[6] prema podatcima `https://www.space.com/18422-apollo-saturn-v-moon-rocket-nasa-infographic.html`

[7] prosječna brzina disanja čovjeka je 6 l/min.