

Psihološki aspekt nastave matematike – model učenja Richarda Skempa

Ivan Dražić, Bribir

“Zamjerati matematici što je apstraktna – nije opravdano. To leži u prirodi matematike. Opravdano je zamjerati nastavniku koji ne povede učenike apstraktnim putem.”

A. Revuz

Richard Skemp (10. 3. 1919. – 22. 07. 1995.) ugledni je engleski znanstvenik čije je područje interesa bilo usmjereno striktno prema proučavanju edukacije matematike, a prednost nad drugim znanstvenicima koji su se bavili tim područjem dalo mu je njegovo interdisciplinarno obrazovanje.

1947. godine završio je u Hertford Collegu za učitelja matematike i četiri godine radio u nastavi. Tijekom svojeg nastavnog djelovanja osjetio je poseban interes za proučavanje fenomena učenja te 1952. godine upisuje studij psihologije. 1959. g. doktorirao je psihologiju na Sveučilištu u Manchesteru, gdje i počinje svoj akademski rad. 1973. godine postao je profesor teorije edukacije na Sveučilištu u Warwicku i tamo ostaje do umirovljenja.

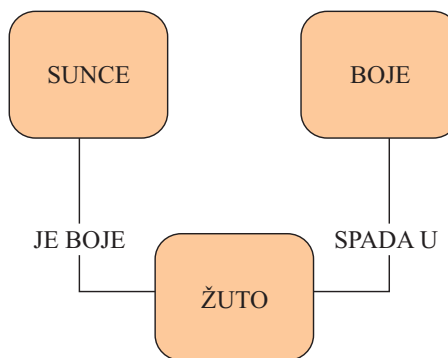
Upravo ta činjenica da je bio istovremeno i učitelj matematike i psiholog, dakle problematiku matematičkog obrazovanja poznao je u pravom svjetlu, dala mu je mogućnost da napravi model učenja koji izuzetno dobro modelira proces učenja matematike.

Modele razvijamo da bi neku pojavu ili proces mogli bolje proučavati i za razvoj tehnoloških procesa upravo su spoznaje dobivene mode-

liranjem od neprocjenjive važnosti. Slično je i kod procesa učenja. Razumijemo li model učenja i otkrijemo li njegove zakonitosti, uspješnije ćemo poučavati i u realnom svijetu.

1. Struktura Skempovog modela učenja

Znanje čovjeka Skemp, kao i dio drugih psihologa, modelira logičkim shemama koje se sastoje od koncepata i veza. Što je koncept,



Sl. 1. Grafički model segmenta logičke sheme, tj. čovjekovog znanja prema Skempu.

intuitivno je jasno, međutim, definirati ga vrlo je teško. Mogli bismo reći da su to sve pojavnosti bilo u realnom, bilo u apstraktnom (imaginarnom) svijetu. Koncepti su jednostavni pojmovi kao što su “žuto” ili “automobil”, no i daleko apstraktniji pojmovi kao što je, primjerice, “filozofija” ili pak “integral”.

Veze u logičkoj shemi jednako su važne kao i koncepti, možda čak i važnije. Slobodno se izrazivši mogli bismo reći da veze drže znanje “na okupu” i, kao što ćemo kasnije vidjeti, osnova su za formiranje novih koncepata.

U skladu s ovim možemo reći da je učenje prema Skempu formiranje logičke sheme koja pravilno opisuje ukupnu pojavnost u nama i oko nas, a steći nova znanja znači proširiti logičku shemu novim konceptima ili formiranjem novih veza između već postojećih koncepata.

Bitno je naglasiti da učiti možemo pravilno i nepravilno; pravilno učenje znači ispravno asimiliranje novih koncepata u postojeću logičku shemu ili proširivanje logičke sheme novim odgovarajućim vezama između već postojećih koncepata. Naučiti nešto krivo u smislu ove teorije znači nekoliko stvari:

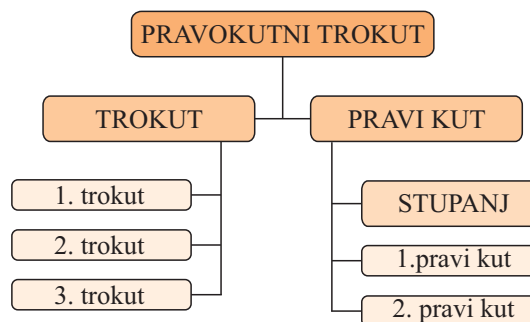
- 1) formirati izoliranu logičku shemu koja se ne može asimilirati u postojeću – ovo se događa kad učenici ne razumiju gradivo, tj. uče ga na reproduktivnom nivou. Jasno je da ovakvo učenje nepotrebno zauzima memorijski prostor mozga;
- 2) novoformirane koncepte asimilirati u postojeću logičku shemu, ali krivim vezama – ovo se događa kad učenici pogrešno razumiju gradivo. Ova situacija predstavlja daleko veći problem jer je zadiranje u postojeću shemu i modificiranje već postavljenih veza daleko teže nego formiranje novih;
- 3) formiranje redundantnih shema – ovo se događa kad učenici ispravno nauče neki pojam s aspekta dvaju predmeta, ali ga nauče tako da formiraju dva koncepta bez jasne

veze između njih, čime opet nepotrebno pretrpavaju memorijski prostor.

2. Formiranje novih koncepata

Prema Skempovoj teoriji kada čovjek preko nekog senzorno-motoričkog kanala primi neki podatak, najprije ga pokušava klasificirati kao neki od postojećih koncepata, tj. ispituje da li se novo iskustvo podudara s nekim već doživljenim iskustvom, tj. postoji li koncept koji odgovara tom iskustvu. Ako postoji, nastavlja operirati tim konceptom, a ako ne, kreće u proces formiranja novog koncepta i asimiliranja istog u postojeću logičku shemu.

Razlikujemo dvije vrste koncepata: primarne i sekundarne. Primarni koncepti novi su u logičkoj shemi i nisu nastali kao derivat nekog već postojećeg koncepta. Sekundarni koncepti razvili su se iz primarnih procesom apstrakcije. Jasno je da neki sekundarni koncept ne može biti formiran ako nisu formirani svi koncepti potrebni za njegovu apstrakciju.



Sl. 2. Ilustracija procesa formiranja koncepta “PRAVOKUTNI TROKUT”

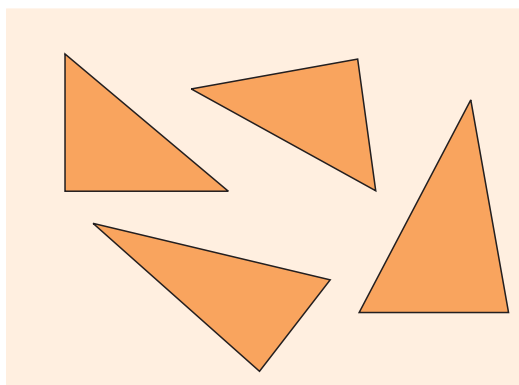
Proces apstrakcije i formiranje sekundarnih koncepata ilustriran je na gornjoj slici. Pojam trokuta možemo shvatiti kao primaran koncept, dakle, učenicima ga se može predstaviti s nekoliko primjera i oni će vjerojatno bez većih problema formirati taj koncept još na nižem stupnju obrazovanja. Međutim, da bi formirali pojam pravokutnog trokuta, kod učenika

mora biti formiran i pojam trokuta i pojam pravog kuta, iz čega se apstrakcijom dolazi do pojma pravokutnog trokuta, dakle, “pravokutni trokut” je sekundaran koncept. Nije potrebno naglašavati da neće biti moguće formirati koncept “pravokutni trokut” ako u učenikovo logičkoj shemi ne postoje ispravno asimilirani koncepti “trokut” i “pravi kut”.

Sve ovo upućuje da kod prenošenja znanja putem definicija treba biti nadasve oprezan, u smislu imaju li učenici formirane sve koncepte koji se u definiciji pojavljuju.

Prema Skempu, prilikom obrade novih pojmova, daleko je bolje, laički rečeno, “pripremiti teren” za formiranje novog pojma, nego izreći definiciju i analizirati istu. Idealno bi bilo da do definicija učenici dolaze sami ili da one služe samo za neku vrstu profinjavanja pojma koji su formirali. Vratimo li se na prethodni primjer, daleko je bolje da učenici promatranjem niza primjera i heurističkim razgovorom dođu do pojma pravokutnog trokuta, nego da se ide pristupom objašnjavanja definicije. Kod izbora objekata iz kojih se izvodi apstrakcija, što su u gornjem primjeru bili trokuti, treba biti oprezan u tzv. količini buke, tj. da je iz danih primjera moguće izvesti što manje apstrakcija ili u idealnom slučaju samo onu koju želimo. Primjer ovog fenomena je sljedeća ilustracija:

Svi trokuti na prethodnoj slici su istovremeno i pravokutni i jednakokračni, tako da su mo-



Sl. 3. Fenomen “buke” kod formiranja koncepta

guće dvije ispravne apstrakcije, što usporava proces formiranja koncepta.

Veliki problem u matematici je što je ona izuzetno apstraktna i često puta navedeni postupak nije moguće provesti, već se novi pojam mora uvesti putem definicije. U tom slučaju treba izuzetnu pozornost obratiti na analizu same definicije, tj. jesu li kod učenika formirani svi koncepti koji se u danoj definiciji koriste i u slučaju da nisu, treba najprije poraditi na tim konceptima, a onda uvoditi novi pojam.

Bitno je napomenuti da u čovjekovom kratkotrajnom pamćenju može biti spremljeno 7 ± 3 simbola. Drugim riječima, treba paziti i na broj koncepata koji se koriste prilikom formiranja novog, posebice ako su oni relativno novi u logičkoj shemi.

3. Intuitivna i refleksivna inteligencija

Uvođenjem pojmova intuitivne i refleksivne inteligencije Skemp je uspio objasniti pojavu koja je bila prilično neshvatljiva. Naime, vrlo se često dogodi da neki jako inteligentni i uspješni ljudi imaju problema s matematikom, dok neki izuzetno dobri matematičari imaju problema s učenjem posebice narativnih predmeta.

Intuitivna inteligencija označava sposobnost operiranja eksternim objektima, njihovu apstrakciju, klasifikaciju i asimilaciju, drugim riječima, učenje činjenica i shvaćanje njihovih uzročno-posljedičnih veza – osnovni alat društvenih i humanističkih znanosti.

Refleksivna inteligencija označava sposobnost operiranja internim objektima, tj. stvaranje novih apstrakcija iz već postojećih, otkrivanje novih veza i akomodaciju postojeće sheme. Upravo to je posao matematičara – traženje novih odnosa među matematičkim objektima.

Ovo govori da uvijek treba imati na umu intelektualnu strukturu razreda kojem se predaje. Ako je u većini razreda razvijenija intuitivna inteligencija, puno više pažnje treba posvetiti refleksivnim vještinama, dakle, zadacima s logikom i sl., dok će kod razreda u kojem je razvijenija refleksivna inteligencija trebati poticati učenje teoretskog dijela, a s logičkim zadacima vjerojatno neće biti problema. Nije potrebno posebno naglašavati da kod učenika s nešto slabije razvijenom refleksivnom inteligencijom treba raditi na razvijanju logičkih vještina, ali biti umjerenijih zahtjeva da se ne bi stvorila odbojnost prema matematici kao predmetu.

4. Neke implementacije Skempove teorije u nastavnom procesu

Nastavna jedinica – dijeljenje razlomaka

Jedan od mogućih pristupa ovoj nastavnoj jedinici je putem definicije.

Razlomak dijelimo razlomkom tako da djeljenik pomnožimo recipročnom vrijednošću djelitelja.

Kod ovog načina uočavaju se dva problema. Prvi je da učenici moraju imati formiran pojam recipročne vrijednosti, a prilikom njegovog formiranja nećemo im moći objasniti svrhu uvođenja recipročne vrijednosti. Drugi je da učenici uče pravilo za dijeljenje razlomaka bez da im je jasno od kuda to pravilo dolazi, tj. postoji mogućnost formiranja izolirane sheme. Pristup u skladu s Skempovom teorijom bio bi da se krene putem sljedećih primjera:

Pitanje: Što znači dijeliti s 2?

Odgovor: Množiti s jednom polovinom.

Sada metodom heurističkog razgovora možemo od učenika dobiti odgovor tipa:

“Razlomke dijelimo tako da prvi razlomak pomnožimo razlomkom kojem smo zamijenili brojnik i nazivnik”.

Ta konstatacija kod učenika prava je podloga i za formiranje pojma recipročne vrijednosti i formiranja stroge definicije dijeljenja razlomaka.

Nastavna jedinica – eksponencijalne nejednadžbe

Prilikom obrade eksponencijalne nejednadžbe tipa $a^x \leq a^y$ vrlo se često ide pristupom da se učenicima definira postupak rješavanja na način:

Ako je baza veća od 1, nejednadžba prelazi u $x \leq y$, a ako je baza manja od 1, nejednadžba prelazi u $x \geq y$, tj. mijenja se znak nejednakosti.

Dakle, uopće se ne spominju pojmovi rasta i pada funkcije. Ne može se reći da se ovim načinom ne postiže cilj, učenici će naučiti rješavati eksponencijalne nejednadžbe, čak im se uz nekoliko primjera može i objasniti i zašto se mijenja znak nejednakosti. Međutim, kod obrade logaritamskih ili pak trigonometrijskih nejednadžbi cijela se priča mora ponoviti. U skladu sa Skempovom teorijom ispravan bi put bio:

- 1) formirati koncept rastuće i padajuće funkcije;
- 2) formirati vezu između koncepta eksponencijalne funkcije i rastuće i padajuće funkcije;
- 3) formirati vezu između rasta i pada funkcije i rješavanja nejednadžbi.

Krenemo li ovim putem, učenicima ne samo da će biti u potpunosti jasno kako se rješavaju eksponencijalne nejednadžbe, već će znati rješavati i čitav niz nejednadžbi (primjerice, $\ln x \leq \ln a$, $\arcsin x \leq \arcsin a$, ...) jer će kad vide nejednadžbu, tražiti vezu s već postojećim iskustvom, dakle, provjeravati je li funkcija rastuća ili padajuća.

Korelacija i metoda eksperimenta

Da između matematike i ostalih nastavnih predmeta postoje brojne korelacije ne treba posebno isticati, međutim, te korelacije često ne iskorištavaju niti nastavnici matematike niti nastavnici drugih predmeta. Važnost korelacija posebno se dobro može objasniti Skempovom teorijom. Pojasnimo to na jednom primjeru. Pojam postotka i pojam masenog udijela u kemiji su u suštini isti pojmovi i učenici s razvijenijom refleksivnom inteligencijom će to bez problema uočiti i primijeniti matematička znanja na zadatke u kemiji. No kod učenika kod kojih više do izražaja dolazi intuitivna inteligencija to nije baš tako jednostavno. Oni kemiju i matematiku uče odvojeno i pritom stvaraju redundantnost u logičkoj shemi. Čak se događa da učenik u matematici zna da je $0.5 = 50\%$, no u kemiji on radi sljedeće $0.5 = 0.5 \cdot 100\% = 50\%$, tj. uopće mu nije jasno da je postotak u matematici i postotak u kemiji ista stvar. Ovaj problem se može ublažiti pozivanjem na korelacije, dakle, kad bi se maseni udio u kemiji radio u isto vrijeme kad i postotak u matematici i kad bi nastavnik matematike dao neki sličan primjer na svojem satu, i nastavnik kemije se prilikom obrade masenog udjela na taj primjer pozvao, učenici bi daleko lakše usvojili oba gradiva jer bi formirali samo jedan koncept, tj. bili bi pošteđeni mukotrnog logičkog procesa povezivanja koncepta "postotak" s konceptom "maseni udio".

S korelacijom je usko povezana i metoda eksperimenta, koja se u matematici zaista ne-

dovoljno koristi. U predmetima kao što je fizika, nastava se zasniva na eksperimentu i većina tih eksperimenata povlači nešto "matematike" pa bi bilo idealno spojiti "matematiku" koja se koristi u tim eksperimentima s "matematikom" na nastavi matematike.

No i čista matematika ima puno prostora za metodu eksperimenta. Obrađujemo li, primjerice, vezu između koeficijenta smjera i nagiba pravca, učenici s razvijenom refleksivnom inteligencijom će već nakon dva do tri primjera uvidjeti vezu, no kod onih s razvijenijom intuitivnom inteligencijom to i nije baš tako jednostavno. Današnja tehnologija razvila je brojne softvere pomoću kojih je moguće vizualno smanjivati i povećavati koeficijent smjera i istovremeno pratiti efekt na pravcu, dakle, moguće je eksperimentirati i omogućiti učenicima s razvijenijom intuitivnom inteligencijom da rade s eksternim objektima i na taj način im omogućiti lakše formiranje novih koncepta i veza.

Literatura

- [1] S. Kolić-Vehovec, (1998.): *Edukacijska psihologija*, Filozofski fakultet, Rijeka
- [2] S. Ovčar, (1990.): *Razvijanje mišljenja u nastavi matematike*, Zrinski, Čakovec
- [3] N. Pastuović, (1997.): *Osnove psihologije obrazovanja i odgoja*, Znamen, Zagreb
- [4] R. Skemp, R. (1993.): *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, Middlesex, England
- [5] D. Wood, (1995.): *Kako djeca misle i uče*, Educa, Zagreb