

Imaginary

– čarobne matematičke projekcije

Bojan Crnković, Doris Dumičić Danilović,
Vedrana Mikulić Crnković, Andrea Švob
i Ivona Traunkar, Rijeka

Još od davnih vremena matematičari su proučavali različita preslikavanja sfere na ravninu i analizirali njihova svojstva. U našim demonstracijama prikazali smo neka od tih preslikavanja igrajući se svjetlom i sjenama. Posebnu pažnju posvetili smo stereografskoj projekciji, njezinim svojstvima i primjenama s naglaskom na primjene u kartografiji.



Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci uključio se u projekt *Imaginary* njemačkog instituta Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (<https://imaginary.org/>) 2016. godine organizacijom izložbe **Imaginary – čarobna matematika** te pratećih radionica i interaktivnih demonstracija. Odjel je 2018. godine nadopunio izložbu novim interaktivnim demonstracijama naziva **Imaginary – čarobne matematičke projekcije**, a taj su projekt financijski podržali Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske i Primorsko-goranska županija. Više o izložbi *Imaginary* koja je održana na Odjelu za matematiku može se pronaći na poveznici <http://imaginary-math.uniri.hr/>.

Stereografska projekcija

Pod projekcijom podrazumijevamo preslikavanje nekog n -dimenzionalnog objekta na $(n-1)$ -dimenzionalni prostor. Na primjer, projicirati možemo neki

trodimenzionalni objekt na ravninu, što ćemo i promatrati u nastavku.

Za tehničko crtanje se u pravilu primjenjuju ortogonalna i kosa projekcija objekata. Naime, na crtačem papiru želimo pregledno prikazati objekt tako da mu se jednostavno mogu odrediti svi detalji, pa time dobivamo nacrt, bokocrt i tlocrt objekta.

Prema vrsti deformacije uzrokovane projekcijom razlikujemo: konformne ("čuvaju" veličinu kutova), ekvivalentne ("čuvaju" površinu likova) i ekvidistantne ("čuvaju" udaljenosti) projekcije. Euler je u 18. stoljeću dokazao da ne postoji projekcija koja je istovremeno i konformna i ekvivalentna.

Centralna ili perspektivna projekcija je projekcija nekog objekta A u trodimenzionalnom prostoru iz zadane fiksne točke O na ravninu R . Projekcija točke P objekta A je sjecište pravca OP i ravnine R . U nastavku opisujemo jednu zanimljivu vrstu centralne projekcije, a to je stereografska projekci-

izv. prof. dr. sc. Bojan Crnković, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, bojan.crnkovic@math.uniri.hr

doc. dr. sc. Doris Dumičić Danilović, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, ddumicic@math.uniri.hr

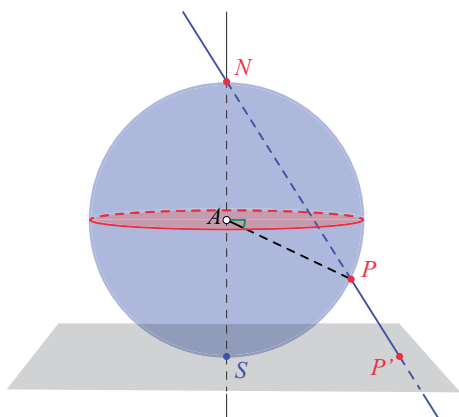
izv. prof. dr. sc. Vedrana Mikulić Crnković, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, vmikulic@math.uniri.hr

doc. dr. sc. Andrea Švob, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, asvob@math.uniri.hr

Ivona Traunkar, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, inovak@math.uniri.hr

ja kojom projiciramo točke sfere (sfera je skup svih točaka prostora jednako udaljenih od čvrste točke koju zovemo središte).

Neka je dana sfera i na nju tangencijalna ravnina R (slika 1). Točku u kojoj ravnina R dodiruje sferu označimo sa S i nazivamo ju južni pol, a njoj dijametralno suprotnu točku na sferi označimo sa N (takozvani "sjeverni pol"). Stereografska projekcija je preslikavanje koje svakoj točki sfere, osim točki N , pridružuje jednu točku ravnine po sljedećem pravilu: stereografska projekcija točke P sjecište je pravca NP s ravninom R . Točku sjecišta označimo sa P' .



Slika 1.

Kod stereografske projekcije najčešće se za ravninu na koju se projicira uzima ona ravnina koja sadrži ekvator ili, kao u našem slučaju, tangencijalna ravnina na sferu u točki koja je dijametralno suprotna točki iz koje projiciramo ili neka ravnina paralelna opisanoj tangencijalnoj ravnini, a da ne presjeca sferu.

Neka od osnovnih svojstava stereografske projekcije pokazao je još grčki astronom i matematičar Hiparh u 2. stoljeću pr. n. e. Navedimo neka svojstva stereografske projekcije na tangencijalnu ravninu sfere u južnom polu.

- Stereografska projekcija je bijektivno preslikavanje.
- Jedina fiksna točka stereografske projekcije je južni pol.

- Stereografska projekcija spada u perspektivne azimutne projekcije, odnosno deformacije projekcije ovise o geografskoj širini projicirane točke. Pretpostavimo da projiciramo točku P i označimo sliku sa P' . Udaljenost točke P' od južnog pola S ovisi o geografskoj širini točke P , odnosno o udaljenosti točke P od sjevernog pola. Promatramo li na sferi točke A i B takve da je točka B bliža sjevernom polu, tada će udaljenost projekcije B' od južnog pola S biti veća od udaljenosti projekcije A' od S .
- Ekvator se stereografskom projekcijom preslika u kružnicu sa središtem u južnom polu. Sve ostale kružnice sfere koje pripadaju ravninama koje su paralelne s ekvatorijalnom ravninom projiciraju se u koncentrične kružnice sa središtem u južnom polu.
- Cijela sjeverna polusfera preslikava se izvan projicirane kružnice ekvatora, a južna unutar nje.
- Stereografska projekcija kružnice na sferi je ili kružnica ili pravac (ako polazna kružnica sadrži sjeverni pol N).
- Stereografska projekcija je konformno preslikavanje, odnosno "čuva" veličine kutova između krivulja. Ako se dvije krivulje na sferi sijeku pod kutom mjere α , onda se i njihove stereografske projekcije u ravnini sijeku također pod kutom iste mjere α .
- Stereografska projekcija nije izometrija, odnosno ne čuva udaljenosti pa time ni sukladnost likova niti njihove površine.
- Stereografsku projekciju možemo dobro aproksimirati postavimo li što sitniji izvor svjetla u neku čvrstu točku na sferi (sjeverni pol).

Svakoj se kocki može opisati sfera pa vrhove kocke možemo projicirati na ravninu stereografskom projekcijom. Promotrimo stereografsku projekciju vrhova kocke iz sjevernog pola (izvor svjetla) na ravninu (zid) koja je paralelna tangencijalnoj ravnini na sferu u južnom polu (slika 2). Iako kocka ima sve strane sukladne, uočimo da četverokuti koje dobijemo spajanjem projekcija vrhova nisu sukladni.



Slika 2.

Povijest problema popločavanja

Popločavanje ravnine je skup geometrijskih likova čije unutrašnjosti nemaju zajedničkih točaka, a čija unija je cijela ravnina. Svakim trokutom i svakim četverokutom (bez obzira jesu li pravilni ili ne) možemo popločiti ravninu.

Popločavanje ravnine pravilnim mnogokutima proučavali su još stari Grci, a proučavajući Platonova i Arhimedova tijela, bavili su se i problemom popločavanja sfere. Johannes Kepler (1571. – 1630.) daje slike Arhimedovih tijela u svojoj knjizi *Harmonices Mundi* te definira i klasificira Arhimedova popločavanja ravnine. Po uzoru na definiciju Arhimedovih tijela, definirano je i Arhimedovo popločavanje ravnine kao unije skupova sukladnih pravilnih mnogokuta. Arhimedovih popločavanja ima 11. Kao što je Arhimedovo tijelo Platonovo ili pravilno ako su strane međusobno sukladni pravilni mnogokuti, tako je i popločavanje skupom međusobno sukladnih mnogokuta pravilno te takvih popločavanja ima 3 (jednakostraničnim trokutima, kvadratima i pravilnim šesterokutima). Veliki broj matematičara koji nisu bili upoznati s Keplerovim radom bavio se klasifikacijom Arhimedovih popločavanja krajem 18. i početkom 19. stoljeća. Otkrićem neeuklidskih geometrija u 19. stoljeću matematičari su se počeli

baviti i problemom popločavanja neeuklidskih ravnina, sferne i hiperboličke ravnine. Jedan od najpoznatijih umjetnika koji je popločavanja ravnine koristio u svojim radovima bio je nizozemski slikar M. C. Escher (1898. – 1972.) koji je u svojim radovima često prikazivao popločavanje hiperboličke ravnine.

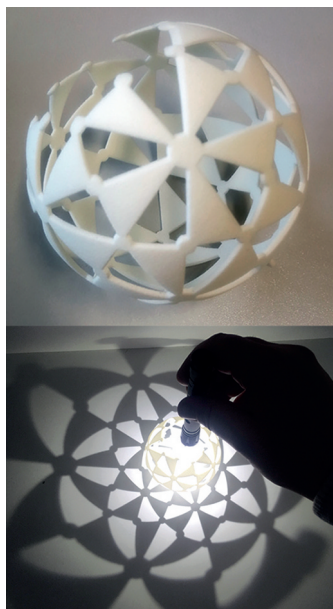
Neeuklidske ravninske geometrije

U sljedećim primjerima promatrat ćemo popločavanje euklidske, sferne i hiperboličke ravnine. Kako bismo bolje razumjeli problematiku, opišimo ukratko neeuklidske ravninske geometrije. Euklidska ravninska geometrija je geometrija u kojoj vrijedi aksiom o paralelama (za zadani pravac p i točku T koja mu ne pripada postoji točno jedan pravac q koji ne siječe p i sadrži točku T) te je zbroj veličina kutova u trokutu jednak 180° (ta je tvrdnja ekvivalenta aksiomu o paralelama). Neeuklidske ravninske geometrije su one geometrije u kojima ne vrijedi aksiom o paralelama te, posljedično, zbroj veličina kutova u trokutu nije jednak 180° . U sfernoj ravninskoj geometriji ne postoji traženi pravac q jer se svaka dva pravca sijeku te je zbroj veličina kutova u trokutu veći od 180° , dok u hiperboličkoj ravninskoj geometriji postoje barem dva pravca q koja zadovoljavaju navedeni uvjet te je zbroj veličina kutova u trokutu manji od 180° .

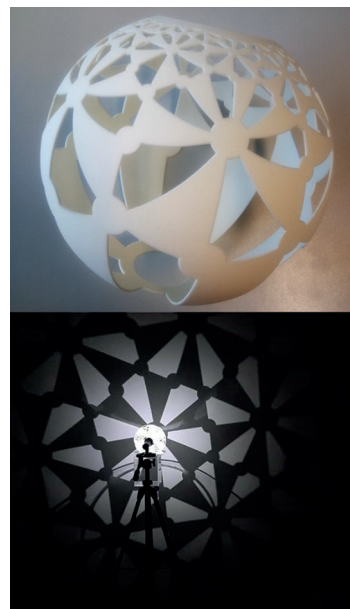
Popločavanje trokutima

Pogledajmo "malu" sferu na kojoj vidimo popločavanje sukladnim sfernim trokutima koje ćemo označiti $(5, 3, 2)$. Objasnimo oznaku $(5, 3, 2)$. Promotrimo jedan trokut i njegove vrhove: označimo ih A , B i C . Vidimo da je vrh A zajednički vrh za 5 trokuta iste boje (bijelih ili crnih), vrh B je zajednički vrh trima trokutima iste boje i vidimo da je vrh C zajednički vrh dvama trokutima iste boje.

Pogledamo li stereografsku projekciju na ravninu, dobit ćemo $(5, 3, 2)$ popločavanje, ali likovima koji nisu niti trokuti niti su sukladni (slika 3).



Slika 3. (5, 3, 2) popločavanje



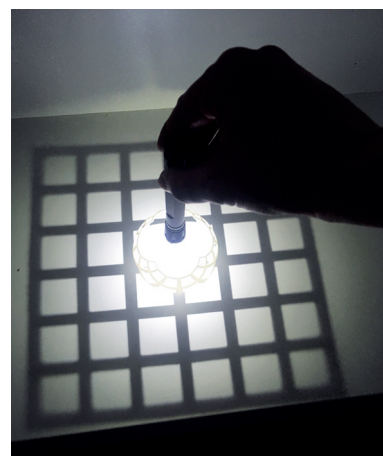
Slika 4. (6, 3, 2) popločavanje

Promotrimo sferu koju možemo označiti sa $(6, 3, 2)$. Promatramo li stereografsku projekciju ove sfere, dobivamo $(6, 3, 2)$ popločavanje euklidske ravnine sukladnim trokutima i to upravo sukladnim pravokutnim trokutima čiji su kutovi veličine 30° , 60° i 90° (slika 4). Uočimo da likovi na sferi nisu trokuti niti su sukladni te su konstruirani upravo tako da stereografska projekcija budu sukladni trokuti ravnine. Na temelju čega smo zaključili da likovi na sferi nisu trokuti? Euklidska ravnina je popločena trokutima iz čega slijedi da je zbroj veličina kutova u liku na sferi također 180° , s obzirom na to da stereografska projekcija “čuva” veličinu kuta, pa to ne može biti trokut jer je zbroj veličina kutova u sfernom trokutu veći od 180° .

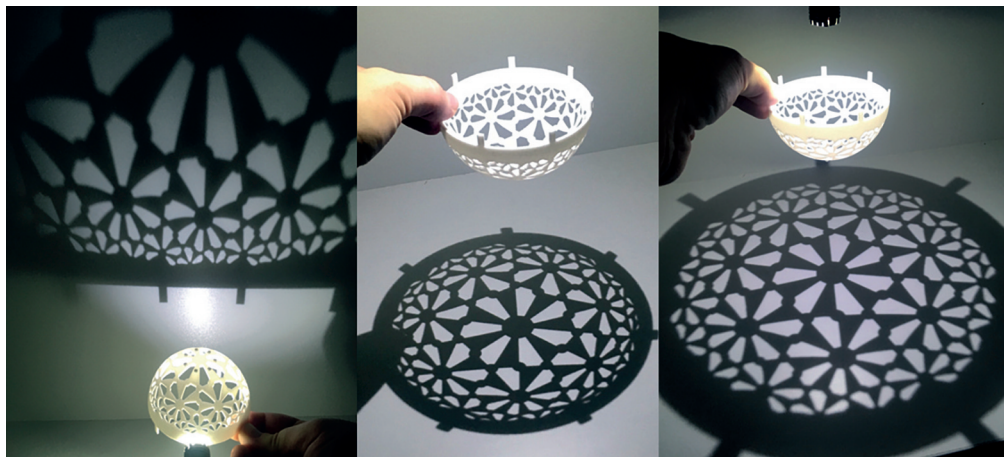
Slično tome, 3D ispis sfere s “kvadratnom” mrežom prikazuje prasiliku stereografske projekcije kojom smo dobili pravilno popločavanje euklidske ravnine kvadratima (slika 5).

Vidjeli smo da stereografskom projekcijom možemo preslikati elemente sferne ravnine u euklidsku ravninu. Postoje projekcije sfere na podskup ravnine (disk, krug) koje definiraju modele hiperboličke ravnine. 3D ispis polusfere koju možemo označiti sa

$(7, 3, 2)$ prikazuje popločavanje hiperboličke ravnine trokutima. Ovisno o tome kako “okrenemo” ovu (donju) polusferu, možemo vidjeti prikaz $(7, 3, 2)$ popločavanja trokutima hiperboličke ravnine u tri različita modela: modelu gornje poluravnine, Kleinovu modelu i Poincareovu modelu (slika 6). Pritom model gornje poluravnine dobivamo tako da izvor svjetlosti postavimo na ekvator polusfere, Poincareov model diska dobijemo tako da izvor svjet-



Slika 5.



Slika 6. (7, 3, 2) popločavanje (model gornje poluravnine, Kleinov model, Poincareov model)

losti postavimo u sjeverni pol, a Kleinov model dobijemo tako da izvor svjetlosti odmaknemo dalje od pola, što nam zapravo daje ortogonalnu projekciju sfere na ravninu (disk).

Zbroj veličina kutova u trokutu u euklidskoj, sfernoj i hiperboličkoj ravninskoj geometriji možemo provjeriti i na našim primjerima popločavanja.

1. (6, 3, 2) popločavanje trokutima postoji jedino u euklidskoj ravnini i to je popločavanje sukladnim trokutima čije veličine kutova su $\frac{180^\circ}{6}$, $\frac{180^\circ}{3}$ i $\frac{180^\circ}{2}$, tj. vidimo da je zbroj veličina kutova u trokutu 180° .
2. (5, 3, 2) popločavanje trokutima postoji jedino u sfernoj ravnini i to je popločavanje sfernim trokutima čije veličine kutova su $\frac{180^\circ}{5}$, $\frac{180^\circ}{3}$ i $\frac{180^\circ}{2}$, tj. vidimo da je zbroj veličina kutova u trokutu $\frac{180^\circ \cdot 31}{30}$ (veći od 180°).
3. (7, 3, 2) popločavanje trokutima postoji jedino u hiperboličkoj ravnini i to je popločavanje trokutima hiperboličke ravnine čije veličine kutova su $\frac{180^\circ}{7}$, $\frac{180^\circ}{3}$ i $\frac{180^\circ}{2}$, tj. vidimo da je zbroj veličina kutova u trokutu $\frac{180^\circ \cdot 41}{42}$ (manji od 180°).

U demonstracijama smo koristili ispisane 3D modele koje je osmislio i dizajnirao matematičar Henry Segerman [4].

Povijest kartografije

Od davnina su ljudi pokušavali kartama prikazati područje koje ih okružuje. Prve karte nisu bile karte Zemljine površine, već karte noćnog neba i zvijezda nastale oko 16 500 godina pr. n. e. Prve geografske karte na glini nastale su još u davnom Babilonu oko 2300. godine pr. n. e., a prve geografske karte na pergamentu u drevnom Egiptu oko 1300. godine pr. n. e. Prve karte (tada poznatog) svijeta izradio je grčki filozof Anaksimandar u 6. stoljeću pr. n. e., a prvu takvu kartu s naznačenim meridijanima i paralelama napravio je grčki geograf Eratosten oko 200. godine pr. n. e. temeljenu na činjenici da Zemlja ima oblik kugle i uz procjenu duljine ekvatora. Taj se događaj smatra i začetkom kartografije kao znanstvene discipline, a Eratosten prvim kartografom.

Ptolomej je oko 150. godine pr. n. e. za kartiranje Zemlje koristio astronomiju i matematiku te je prikazao kartu koristeći perspektivnu projekciju, projekciju iz neke točke koja se može dobro predstaviti svjetlom. Međutim, i prije njega su korištene projekcije za prikaz nebeskih sfera. Tales je prvi oko

600. godine pr. n. e. koristio projekciju za prikaz karte te je gnomskom projekcijom (izvor svjetla u središtu sfere) prikazivao nebeska tijela dok je Hiparh oko 150. godine pr. n. e. koristio stereografsku i ortogonalnu projekciju. Često se navodi da je on prvi koji je koristio stereografsku projekciju iako se smatra da su je koristili već stari Egipćani.

Daljnji razvoj kartografije bio je motiviran većom spoznajom o svijetu koji nas okružuje, razvojem znanosti, velikim brojem otkrića (npr. kompas) te brojnim primjenama karata (u vojne svrhe, u trgovini...). Prvi globus izradio je Martin Behaim tek u 15. stoljeću. Na tom globusu nije bilo Amerike. U 16. stoljeću djelovao je veliki kartograf Gerardus Mercator koji je razvio do tada nepoznatu projekciju, danas poznatu kao Mercatorova projekcija, koja je i danas u upotrebi te se uzima kao konvencionalni način prikaza svijeta.

Kartografske projekcije

Kartografska projekcija je preslikavanje elipsoida ili sfere na ravninu. Obzirom na Eulerov rezultat iz 18. stoljeća kojim je pokazao da ne postoji projekcija koja je istovremeno i konformna i ekvivalentna, zaključujemo da u ravnini ne možemo vjerno prikazati Zemlju.

Promotrimo 3D model Zemlje koji je dizajnirao David Bachman i njegovu stereografsku projekciju. Vidjeli smo da je stereografska projekcija konformno preslikavanje. Uočimo da se stereografskom projekcijom meridijani preslikavaju u pravce koji sadrže projekciju središta sfere, a paralele se preslikavaju u kružnice kojima je središte projekcija središta sfere.

Pri definiciji stereografske projekcije projicirali smo s obzirom na sjeverni pol. Mogli smo projicirati i s obzirom na neku drugu točku:

- s obzirom na točku pravca koji sadrži sjeverni pol i središte sfere, na primjer središte sfere (gnomska projekcija) ili točku koja ne pripada kugli (vanjska projekcija)
- s obzirom na neku drugu točku sfere, na primjer s obzirom na točku koja pripada ekvatoru (poprečna projekcija) ili s obzirom na točku koja pripada meridijanu (kosa projekcija).

Pokazuje se da vanjska projekcija u kojoj je točka s obzirom na koju projiciramo udaljena za $1.35R$ (R – duljina promjera) od središta sfere daje najmanju deformaciju (Calarkova projekcija). Vanjska projekcija za koju je točka s obzirom na koju projiciramo beskonačno udaljena od sfere jest ortogonalna projekcija.

Svakom od navedenih projekcija mijenja se deformacija pojedinih područja. U stereografskoj projekciji projicirali smo na ravninu "ispod" sfere, odnosno na ravninu koja je tangencijalna sferi u južnom polu (zenitna projekcija) ili neku od njoj paralelnih ravnina. Međutim, možemo projicirati i na neke druge ravnine. Na primjer, na ravninu koja je dobivena "razmotavanjem" plašta stošca opisanog sferi (konusna projekcija) ili na ravninu koja je dobivena "razmotavanjem" plašta valjka koji je opisan sferi (cilindrična projekcija). Mercatorova projekcija projicira sferu s obzirom na izvor svjetla u središtu sfere na plašt valjka koji sadrži ekvator. Mercatorovom projekcijom se i meridijani i paralele preslikavaju u pravce te su oni međusobno okomiti. Najmanja deformacija je na područjima blizu ekvatora te je ona tim veća što je područje udaljenije od ekvatora. Iz toga razloga Mercatorova projekcija nije prikladna za prikaz većih područja (primjerice, u toj je projekciji površina Grenlanda približno jednaka površini Afrike, iako je ona u stvarnosti oko 14 puta manja). Bez obzira na nedostatke, Google maps koristi prikaz dobiven upravo Mercatorovom projekcijom te je ona više stoljeća najčešće korištena projekcija u brodskoj navigaciji.

Na slici u panoptikumu ovog broja Miš-a sfera je namještena tako da je Europa najmanje deformirana pri stereografskoj projekciji.

LITERATURA

- 1/ Kristina Krulić (2006.): Popločavanje ravnine, *Hrvatski matematički elektronski časopis math.e*, broj 7..
- 2/ Miljenko Lapaine (2002.): Kartografske projekcije, *Kartografija i geoinformacije*, Vol. 1, No. 1.
- 3/ P. J. Ryan (1991.): *Euclidean and non-Euclidean Geometry – an Analytic Approach*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- 4/ Henry Segrarn (2016.): *Visualizing Mathematics with 3D Printing*, Johns Hopkins University Press.