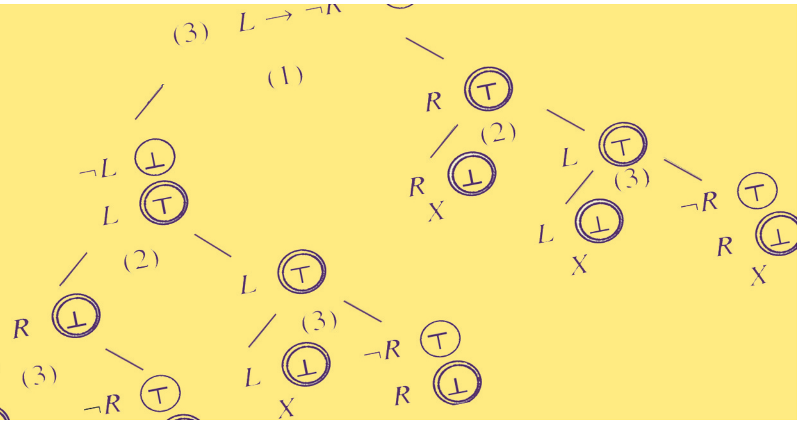
Rješavanje logičkih zadataka metodom semantičkih stabala



Milana Vuković i
Mladen Vuković, Zagreb

Osnovna motivacija za pisanje ovog članka bio je sljedeći zadatak:

U nekoj gostionici skupili su se mladići i djevojke na pokladnoj zabavi. Gazdarica gostionice rekla je mladićima: "Svatko tko ispuni sljedeća tri uvjeta dobit će bocu šampanjca. Uvjeti glase:

1) *Ako netko pleše s crnkom ili pleše sa mnom (inkluzivno "ili"!), onda mora plesati s konobaricom i ne smije plesati s plavušom.*
2) *Ako netko ne pleše s konobaricom ili ako pleše s crnkom, onda ne smije plesati sa mnom, ali mora plesati s plavušom.*
3) *Mora plesati sa mnom, ali ne smije s konobaricom, osim ako pleše s crnkom, ali ne s plavušom."*

Što mora učiniti mladić da dobije besplatnu bocu šampanjca?

Zadatak je postavljen i riješen u knjizi D. Blanuše [1] na stranicama 349 i 350 korištenjem Booleovih algebri. D. Blanuša je bio profesor matematike na Elektrotehničkom fakultetu u Zagrebu (današnjem FER-u). U članku [5] riješen je jedan drugi zadatak iz knjige profesora Blanuše, također primjenom Boolevih algebri. Oba Blanušina zadatka navedena su i u članku [8]. Namjera nam je ovdje izložiti metodu semantičkih stabala, te njome riješiti zadatak profesora Blanuše i još neke slične zadatke. Metoda semantičkih stabala nije univerzalna metoda za rješavanje tzv. logičkih zadataka. Štoviše, mislimo da je logičke zadatke najbolje rješavati "na prste", tj. primjenom osobne "zdrave logike". No, treba istaknuti da je uloga semantičkih stabala vrlo važna u matematičkoj logici i teorijskom računarstvu.

Osnovno o logici sudova

Kada se spomene logika sudova, većina ljudi će pomisliti na semantičke tablice, ili na onaj "mokri" primjer: "Ako kiša pada, onda su ulice mokre." Logika sudova je daleko više od toga. Prije svega ona je primjer jedne formalne matematičke teorije. Na jednom takvom jednostavnom primjeru lako je uvesti pojmove kao što su, primjerice: jezik teorije, interpretacija, ispunjivost, konzistentnost, adekvat-

Milana Vuković, prof. matematike, OŠ Dobriše Cesarića, Zagreb, `milanavukovic7@net.hr`
izv. prof. dr. sc. Mladen Vuković, PMF- Matematički odsjek, Zagreb, `vukovic@math.hr`

nost, potpunost i odlučivost. Ovdje ćemo ukratko ponoviti pojmove koji su nam potrebni za definiranje metode semantičkih stabala. U logici sudova koristimo se sljedećim simbolima za izgradnju formula:

a) propozicionalnim varijablama koje označavamo velikim tiskanim slovima (A, B, C, P, Q, $R \dots$)

b) logičkim veznicima: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$

c) zagradama: (i).

Logičke veznike redom nazivamo ovako:

$\neg$	negacija	$\wedge$	konjunkcija	$\vee$	disjunkcija
$\rightarrow$	kondicional	$\leftrightarrow$	bikondicional		

Ranije navedenim simbolima gradimo formule. Svaka propozicionalna varijabla je najjednostavnija formula logike sudova. Ako su A i B formule, tada su i $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ i $(A \leftrightarrow B)$ također formule. Primjerice, $(P \vee \neg Q) \rightarrow \neg\neg R$, P, $A \leftrightarrow \neg B$ i $\neg P \rightarrow (Q \rightarrow \neg(R \wedge \neg P))$ su primjeri formula.

Kako bismo mogli govoriti o istinitosti neke formule, moramo interpretirati svaki pojedini simbol. U tu svrhu prvo definiramo pojam interpretacije u logici sudova. To je svaka funkcija čija je domena skup svih propozicionalnih varijabli, a kodomena je dvočlani skup $\{0, 1\}$. Svaka interpretacija I se proširuje na skup svih formula na sljedeći način:

$I(\neg A) = 1$	ako i samo ako	$I(A) = 0$;
$I(A \wedge B) = 1$	ako i samo ako	$I(A) = 1$ i $I(B) = 1$;
$I(A \vee B) = 1$	ako i samo ako	$I(A) = 1$ ili $I(B) = 1$;
$I(A \rightarrow B) = 1$	ako i samo ako	$I(A) = 0$ ili $I(B) = 1$;
$I(A \leftrightarrow B) = 1$	ako i samo ako	$I(A) = I(B)$.

Želimo istaknuti da veznik *ili* shvaćamo inkluzivno. Primjerice, zahtjev "$I(A) = 1$ ili $I(B) = 1$" znači da je ili $I(A) = 1$, ili $I(B) = 1$ ili oboje.

Preglednije je vrijednost interpretacije na formulama definirati tablicama koje se nazivaju semantičke tablice. Tada se vrijednosti interpretacije za složenije formule mogu definirati i ovako:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ovdje smo zbog preglednosti upotrijebili semantičku tablicu. No, smatramo da semantičke tablice kod čitatelja prebrzo stvaraju dojam da je razumio što u njima piše, te da se veći dio matematičke logike svodi na sematičke tablice.

Ako je F formula, te I interpretacija i vrijedi $I(F) = 1$, tada kažemo da je formula F istinita za interpretaciju I. Ako pak je $I(F) = 0$, tada kažemo da je formula F neistinita za interpretaciju I. Za formulu F kažemo da je **ispunjiva** ako postoji interpretacija I takva da vrijedi $I(F) = 1$. Kažemo da je formula F **tautologija** ako za svaku interpretaciju I vrijedi $I(F) = 1$. Za formulu F kažemo da je **antitautologija** ako za svaku interpretaciju I vrijedi $I(F) = 0$.

Metoda semantičkih stabala

Semantičke tablice su jedan algoritam kojime možemo ispitati je li neka formula ispunjiva, odnosno tautologija ili antitautologija. Ako formula sadrži n propozicionalnih varijabli, tada pripadna semantička tablica sadrži 2^n redaka. Iz tog razloga obično se kaže da su semantičke tablice algoritam eksponencijalne vremenske složenosti.

Sljedećom tablicom želimo naglasiti koliko su veliki neki brojevi. Pretpostavimo da neko računalo izvršava milijun instrukcija u sekundi. U sljedećoj su tablici istaknuta okvirna vremena koja bi bila potrebna računalu za izvršiti $f(n)$ instrukcija za različite vrijednosti n.

U primjeni se nerijetko javlja potreba za ispitivanjem formula logike sudova koje imaju više tisuća varijabli. Primjerice, logika sudova se koristi prilikom testiranja mikroprocesora, u izgradnji ekspertnih sustava, te u umjetnoj inteligenciji i strojnom učenju. Posebno je važna njena uloga u logičkom programiranju (vidi [2]).

$f(n)$	$n = 10^3$	$n = 10^5$	$n = 10^6$
$\log_2 n$	10^{-5} sec	$1,7 \cdot 10^{-5}$ sec	$2 \cdot 10^{-5}$ sec
n	10^{-3} sec	0,1 sec	1 sec
$n \cdot \log_2 n$	0,01 sec	1,7 sec	20 sec
n^2	1 sec	3 sata	12 dana
n^3	17 min	32 godine	317 stoljeća
2^n	10^{285} stoljeća	$10^{10\ 000}$ godina	$10^{100\ 000}$ godina

Još nije poznato postoji li algoritam za ispitivanje ispunjivosti formula logike sudova čija je vremenska složenost polinomna. Poznati problem SAT (engl. *satisfiability*) glasi: "za danu formulu F odrediti je li ispunjiva". Cook i Levin su nezavisno 1970. godine dokazali da egzistencija polinomno vremenski složenog algoritma za problem SAT povlači egzistenciju "dobrih" algoritama za mnoge teške probleme. Time želimo naglasiti da neki dijelovi logike sudova nisu nimalo trivijalni. Jedan od tzv. sedam milenijskih problema je problem P vs. NP koji je bitno povezan s problemom SAT. O tome možete čitati u članku [12].

Semantičkom tablicom ispituje se istinitost dane formule za svaku interpretaciju, pa kažemo da su one jedan potpuni test. Algoritmi koji ispituju egzistenciju jedne interpretacije nazivaju se ciljani testovi. Sada dajemo jedan primjer ciljanog testa. Nazivamo ga metoda semantičkih stabala.

Opišimo metodu semantičkih stabala prilikom ispitivanja je li neka zadana formula F tautologija. Polazimo od pitanja postoji li interpretacija I takva da vrijedi $I(F) = 0$. Iz tog razloga prvi redak prilikom tog ispitivanja ima oblik $F \perp$. Tada primjenom određenih pravila razgrađujemo danu formulu, odnosno složene uvjete svodimo na više jednostavnijih. Ovdje znak $\perp$ koristimo kao oznaku za "formula je neistinita za neku interpretaciju", a znak $\top$ je oznaka za "formula je istinita na neku interpretaciju". Sada navodimo pravila kojima se koristimo prilikom metode semantičkih stabala. Za svaki logički veznik imamo dva pravila. Jedno se odnosi na slučaj kada je formula istinita za interpretaciju, a drugo na slučaj kada je formula neistinita. Pravila je lako opravdati kada se uzme u obzir definicija interpretacije složenih formula.

$$(\neg)\qquad \begin{array}{c} \neg B \ \top \\ B \ \perp \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg B \ \perp \\ B \ \top \end{array}$$

$$(\wedge)\qquad \begin{array}{c} B \wedge C \ \top \\ B \ \top \\ C \ \top \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & B \wedge C \ \perp & \\ / & & \backslash \\ B \ \perp & & C \ \perp \end{array}$$

$$(\vee)\qquad \begin{array}{ccc} & B \vee C \ \top & \\ / & & \backslash \\ B \ \top & & C \ \top \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} B \vee C \ \perp \\ B \ \perp \\ C \ \perp \end{array}$$

$$(\rightarrow)\qquad \begin{array}{ccc} & B \rightarrow C \ \top & \\ / & & \backslash \\ B \ \perp & & C \ \top \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} B \rightarrow C \ \perp \\ B \ \top \\ C \ \perp \end{array}$$

$$(\leftrightarrow)\qquad \begin{array}{ccc} & B \leftrightarrow C \ \top & \\ / & & \backslash \\ B \ \top & & B \ \perp \\ C \ \top & & C \ \perp \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & B \leftrightarrow C \ \perp & \\ / & & \backslash \\ B \ \top & & B \ \perp \\ C \ \perp & & C \ \top \end{array}$$

Zaokruživanje simbola $\top$, tj. oznaka $\top$, znači da se dani zahtjev svodi na nove zahtjeve koji ga slijede, te da je pripadni redak potpuno analiziran i na njega se više ne moramo vraćati. Za ilustraciju promotrimo sljedeće pravilo:

$$\begin{array}{ccc} & B \vee C \ \top & \\ / & & \backslash \\ B \ \top & & C \ \top \end{array}$$

Iz njega čitamo da je formula $B \vee C$ istinita ako je istinita formula B ili pak je istinita formula C, tj. istinitost formule $B \vee C$ svodi se na istinitost formule B ili formule C.

Ako se radi o propozicionalnoj varijabli, tada se koristimo oznakama $\top$ i $\perp$. Na taj način označavamo mjesta koja su nam na kraju analize jedina važna.

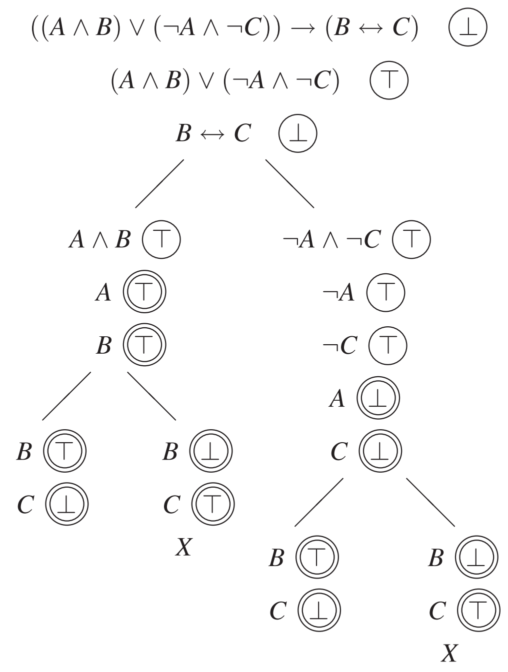
Ako se prilikom ispitivanja na nekoj grani pojave redci oblika $F \ \top$ i $F \ \perp$, tada na toj grani prekidamo ispitivanje, te na kraj grane stavljamo oznaku X. Time smo označili da su uvjeti na egzistenciju interpretacije kontradiktorni na toj grani. Ako sve grane završe sa X, tada zaključujemo da tražena interpretacija ne postoji. Inače s grane koja nije završila sa X očitavamo traženu interpretaciju.

Primjer 1. Ispitajmo metodom semantičkih stabala je li formula $\neg(A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg A \vee B)$ tautologija. Ovaj prvi primjer ćemo vrlo detaljno raspisati. Svaki redak stabla posebno numeriramo, te iza svakog retka pišemo komentar. Na slici 1 dana je ilustracija pripadne analize.

Budući da su sve grane završile sa X, zaključujemo da ne postoji interpretacija za koju bi dana formula bila neistinita. To znači da je početna formula tautologija.

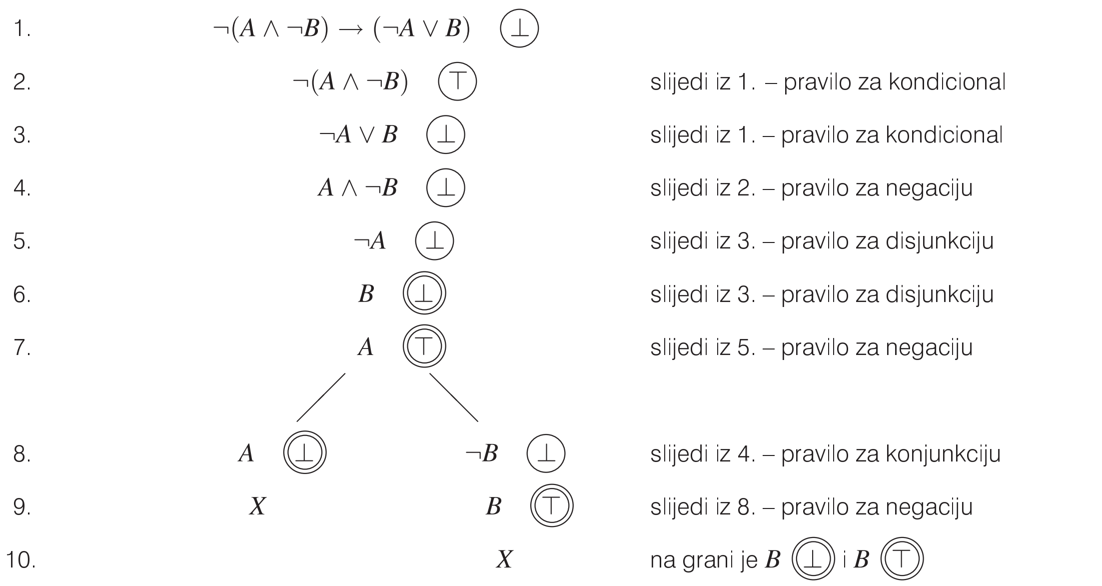
Primjer 2. Ispitajmo metodom semantičkih stabala je li formula $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C)) \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ tautologija. Pripadna analiza ilustrirana je na slici 2.

Budući da postoje grane koje nisu završile kontradikcijom zaključujemo da dana formula nije tautologija. Možemo očitati dvije interpretacije za koje je dana formula neistinita. Jedna interpretacija I je definirana sa $I(A) = I(B) = 1$ i $I(C) = 0$. Druga interpretacija J je definirana sa $J(A) = J(C) = 0$ i $J(B) = 1$.



Slika 2 (uz primjer 2)

Dokaz korektnosti i potpunosti metode semantičkih stabala možete vidjeti u [14]. Semantičko stablo uvijek završava u konačno mnogo koraka. Tada



Slika 1 (uz primjer 1)

možemo vidjeti je li, primjerice, formula tautologija, ili pak možemo očitati interpretacije za koje je formula neistinita. To znači da za svaku formulu logike sudova možemo u konačno mnogo koraka odlučiti je li tautologija. Zbog toga kažemo da je logika sudova odlučiva teorija. To je jedna od najvećih razlika s logikom prvog reda koja nije odlučiva teorija (Churchov teorem).

Nažalost, metoda semantičkih stabala je također eksponencijalno vremenski složen algoritam (zašto?).

Logički zadatci

U ovom dijelu želimo ilustrirati na nekoliko primjera kako se koristiti metodom semantičkih stabala prilikom rješavanja nekih logičkih zadataka. Svakako odmah treba istaknuti da ova metoda nije pogodna za rješavanje svakog logičkog zadatka. To ćemo ilustrirati na samom kraju.

Prvi je primjer dosta trivijalan, te bi se mogao riješiti gotovo "na prste". No, tim primjerom želimo samo ilustrirati metodu semantičkih stabala. Primjeri koji slijede nakon prvog će biti daleko složeniji.

Primjer 1. Dječak se spremao za školski izlet. Mama (kao i svaka druga mama) željela mu je pomoći svojim savjetima. Budući da je sin nije pažljivo slušao, te je čak i glasno negodovao zbog maminih savjeta, svi njeni sakupljeni savjeti su izgledali ovako:

1) Ako ne poneseš loptu, tada možeš uzeti reket za tenis.
2) Ako odlučiš ponijeti reket, tada možeš uzeti i loptu.
3) Ako uzmeš loptu, tada nemoj ponijeti reket.

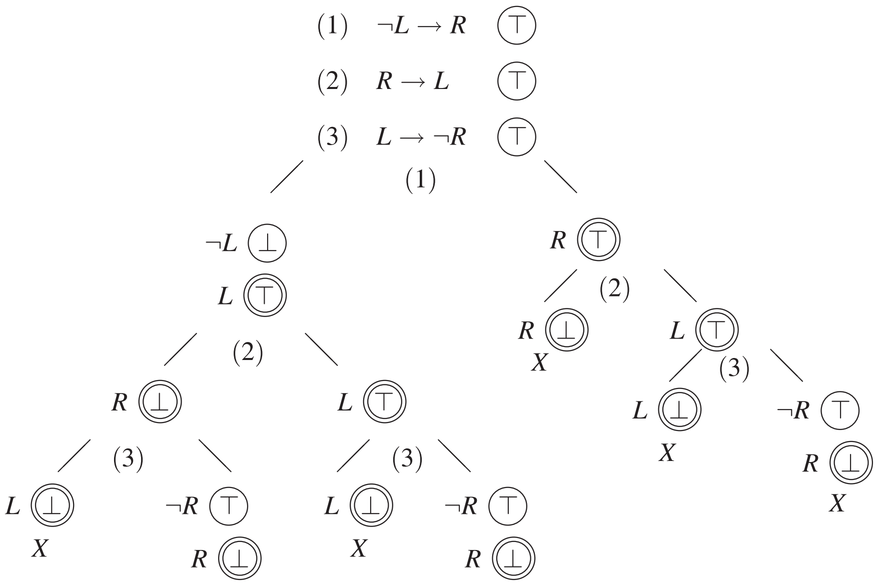
Može li dječak ispuniti sve mamine zahtjeve?

Rješenje. Označimo sa L rečenicu "Ponijet ćeš loptu", a sa R označimo rečenicu "Ponijet ćeš reket". Tada sve mamine savjete možemo simbolički zapisati jednom formulom logike sudova ovako:

$$(\neg L \to R) \wedge (R \to L) \wedge (L \to \neg R).$$

Trebamo ispitati je li dana formula ispunjiva. Metoda semantičkih stabala za ovaj primjer ilustrirana je na slici 3.

Dvije grane nisu završile kontradikcijom. To znači da je početna formula ispunjiva. Iz obje grane čitamo istu interpretaciju I: $I(L) = 1$ i $I(R) = 0$. Ako dječak želi ispuniti sve mamine zahtjeve, tada treba na izlet ponijeti loptu, a reket mora ostaviti doma.



Slika 3 (uz primjer 1)

Primjer 2. Riješimo sada metodom semantičkih stabala zadatak profesora Blanuše s početka ovog članka. Uvodimo sljedeće oznake za tvrdnje:

- P – “mladić je plesao s plavušom”;
- C – “mladić je plesao s crnkom”;
- K – “mladić je plesao s konobaricom”;
- G – “mladić je plesao s gazdaricom”.

Ako simbole P, C, K i G shvatimo kao propozicionalne varijable, tada se dani zadatak svodi na ispitivanje je li sljedeća formula F ispunjiva:

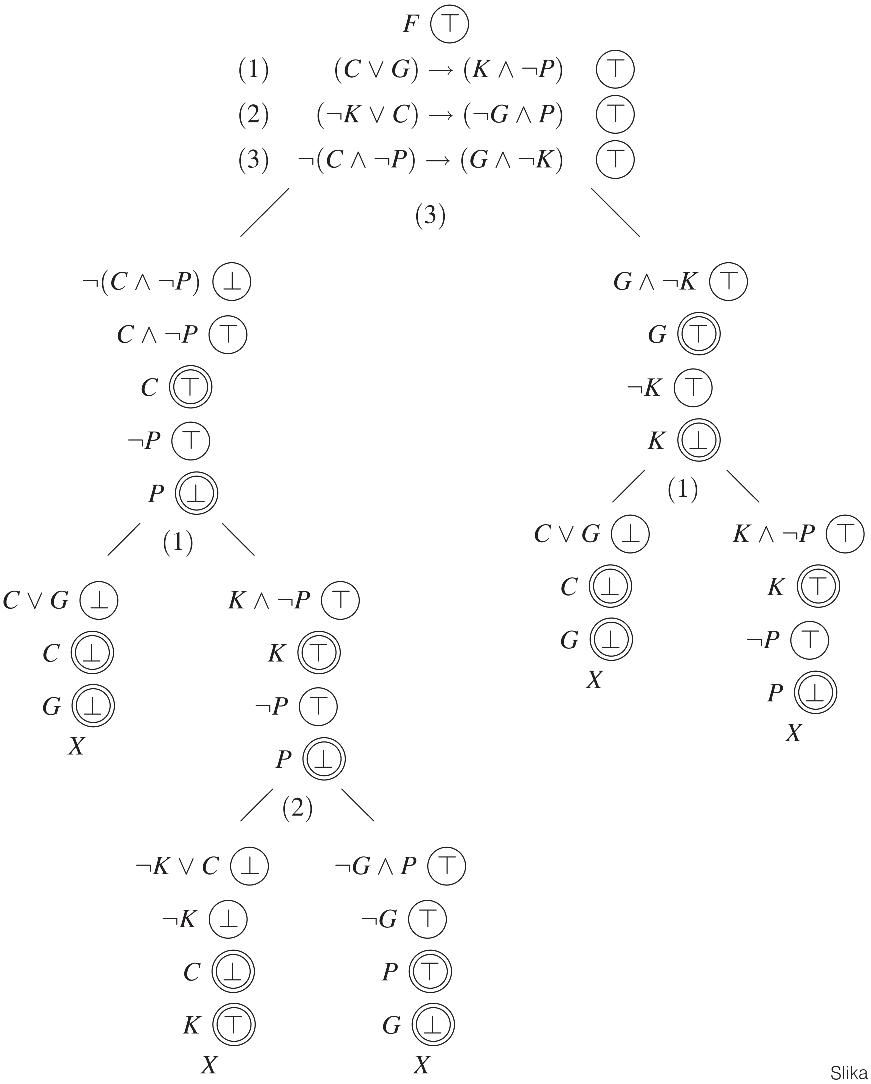
$$F \equiv ((C \vee G) \rightarrow (K \wedge \neg P)) \;\wedge\; ((\neg K \vee C) \rightarrow (\neg G \wedge P)) \wedge (\neg(C \wedge \neg P) \rightarrow (G \wedge \neg K)).$$

Semantičko stablo kojim je ispitana ispunjivost formule F dano je na slici 4.

Budući da su sve grane završile kontradikcijom, zaključujemo da formula F nije ispunjiva. To znači da niti jedan mladić ne može ispuniti gazdaričine uvjete i osvojiti šampanjac.

Rješavanjem sljedećeg primjera želimo ilustrirati da u nekim slučajevima metoda semantičkih stabala može biti samo dio postupka. Primjer je preuzet iz MFL XXII 1 (1971.–1972.) gdje je na strani 28 naveden kao zadatak pod brojem 1081.

Primjer 3. Četiri učenika A, B, C i D sudjelovalo je u jednom natjecanju. Na pitanje kakav je bio



Slika 4 (uz primjer 2)

poredak, A je izjavio: "C je prvi, B je drugi"; B je rekao: "C je drugi, D je treći"; C tvrdi: "D je četvrti, A je drugi". Svaki od učenika A, B i C iskazao je dvije tvrdnje od kojih je jedna istinita, a jedna lažna. Kakav je bio poredak?

Rješenje. Za svaki $i \in \{1,2,3,4\}$ uvodimo redom oznake za tvrdnje:

A_i – "učenik A je bio i-ti po redu";
B_i – "učenik B je bio i-ti po redu";
C_i – "učenik C je bio i-ti po redu";
D_i – "učenik D je bio i-ti po redu".

Iz izjava učenika i uvjeta da je kod svakog od njih jedna tvrdnja istinita, a druga lažna, slijedi da treba odrediti interpretaciju I za koju je sljedeća formula istinita:

$$\begin{aligned} G \equiv\ & ((C_1 \vee B_2) \wedge \neg(C_1 \wedge B_2)) \\ & \wedge\ ((C_2 \vee D_3) \wedge \neg(C_2 \wedge D_3)) \\ & \wedge ((D_4 \vee A_2) \wedge \neg(D_4 \wedge A_2)). \end{aligned}$$

Zatim, za interpretaciju I trebaju biti ispunjena sljedeća dva uvjeta:

a) ni za jednog učenika $U \in \{A,B,C,D\}$ i ni za koji par brojeva $i \neq j$ ne vrijedi $I(U_i) = I(U_j) = 1$ (to znači da jedan učenik ne može zauzeti dva različita mjesta u poretku)

b) za sve parove učenika $U,V \in \{A,B,C,D\}$, $U \neq V$ i za svaki $i \in \{1,2,3,4\}$ ne smije vrijediti $I(U_i) = I(V_i) = 1$ (pretpostavljamo da, primjerice, dva učenika ne mogu zauzeti treće mjesto).

Metodom semantičkih stabala odredimo interpretaciju I za koju je formula G istinita, te za koju su ispunjeni uvjeti (1) i (2). Početak analize dan je na slici 5.

G $\top$

(1) $(C_1 \vee B_2) \wedge \neg(C_1 \wedge B_2)$ $\top$

(2) $(C_2 \vee D_3) \wedge \neg(C_2 \wedge D_3)$ $\top$

(3) $(D_4 \vee A_2) \wedge \neg(D_4 \wedge A_2)$ $\top$

$C_1 \vee B_2$ $\top$

$\neg(C_1 \wedge B_2)$ $\top$

$C_1 \wedge B_2$ $\perp$

C_1 $\top$ | B_2 $\top$

C_1 $\perp$ | B_2 $\perp$ | C_1 $\perp$ | B_2 $\perp$

X | | | X

Slika 5 (uz primjer 3)

Na tren ćemo prekinuti ovu analizu kako bismo skratili daljni postupak (te kako bi nam ilustacija stala na jednu stranu papira). Iz prethodne analize možemo zaključiti da razmatranjem formule (1) dobivamo stablo koje je prikazano na sljedećoj slici.

(1) $(C_1 \vee B_2) \wedge \neg(C_1 \wedge B_2)$ $\top$

C_1 $\top$ | C_1 $\perp$

B_2 $\perp$ | B_2 $\top$

Na isti način zaključujemo da analizom formula (2) i (3) dobivamo stabla prikazana na sljedeće dvije slike.

(2) $(C_2 \vee D_3) \wedge \neg(C_2 \wedge D_3)$ $\top$

C_2 $\top$ | C_2 $\perp$

D_3 $\perp$ | D_3 $\top$

(3) $(D_4 \vee A_2) \wedge \neg(D_4 \wedge A_2)$ $\top$

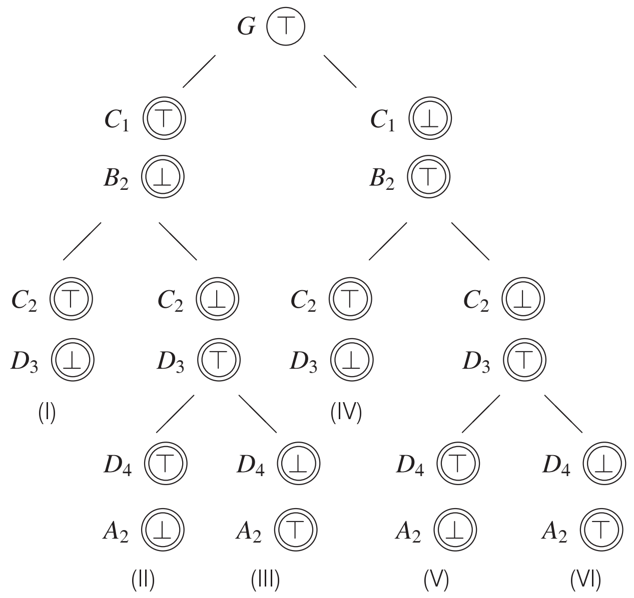
D_4 $\top$ | D_4 $\perp$

A_2 $\perp$ | A_2 $\top$

Sada provodimo analizu početne formule G na način da prethodna tri stabla spajamo u jedno. To je ilustrirano na slici 6 na sljedećoj stranici.

Krajeve svake od šest grana posljednjeg stabla označili smo rimskim brojevima kako bismo ih sada mogli lakše komentirati. Na grani (I) nismo analizirali formulu (3) jer na toj grani imamo C_1 $\top$

i C_2 $\top$. To bi značilo da se osoba C nalazi istovremeno na prvom i drugom mjestu, što je nemoguće. Analogno, na grani (II) imamo D_3 $\top$ i D_4 $\top$. Na grani (IV) imamo B_2 $\top$ i C_2 $\top$, što bi značilo da se osobe B i C nalaze na drugom mjestu, a to je u suprotnosti s uvjetom b) s početka. Na sličan način vidimo da s grana (V) i (VI) ne možemo očitati traženu interpretaciju. Konačno, s grane (III) čitamo poredak natjecatelja: 1. C, 2. A, 3. D i 4. B.



Slika 6

Zadatak 1. U knjizi [1] na strani 347 nalazi se i sljedeći zadatak:

Neki mladoženja poslije vjenčanja reče svojoj ženi: "Draga moja, dobro ćemo se slagati ako s obzirom na ručkove ispuniš ova tri uvjeta:

1. *Ako ne daš kruh na stol, tada moraš dati sladoled.*
2. *Ako daš kruh i sladoled, ne smiješ dati krastavce.*
3. *Ako daš krastavce ili (inkluzivno 'ili'!) ne daš kruh, onda ne smiješ dati sladoled."*

Jesu li ovi uvjeti zajedno ispunjivi, i ako jesu, kako ih je moguće postići?

Probajte i ovaj zadatak profesora Blanuše riješiti metodom semantičkih stabala.

Sljedeći zadatak je preuzet iz članka [13] gdje je riješen Booleovim algebrama. Pokušajte ga riješiti metodom semantičkih stabala.

Zadatak 2. *Od 6 dječaka dvojica imaju popravak iz matematike. Na pitanje, koja su to dvojica, dobivene su sljedeće izjave: Branko: "Dražen i Marijan"; Dražen: "Branko i Zvonko"; Goran: "Branko i Krešo"; Krešo: "Branko i Goran"; Marijan: "Dražen i Zvonko." Od tih 5 izjava jedna je u potpunosti kriva (niti jedan učenik nije ispravno naveden), a u svakoj od preostale 4 izjave ispravno je naveden po jedan učenik koji treba ići na popravak. Odredite koji učenici trebaju ići na popravak.*

U popis literature, koji slijedi, stavili smo naslove koji sadrže logičke zadatke. Neki bi se zadatci mogli riješiti metodom semantičkih stabala za logiku prvog reda (vidi [14]).

LITERATURA

1/ D. Blanuša (1966.): *Viša matematika*, II dio, prvi svezak, Tehnička knjiga, Zagreb.

2/ V. Čačić, P. Paradžik, M. Vuković (2015.): *Logičko programiranje*, e.math, 26, `http://e.math.hr/broj_26/Cacic`

3/ V. Devidé: *Školsko natjecanje iz logike u Republici Sloveniji*, Matka 5 (1996./97.), br. 19, str. 128–133.

4/ Ž. Hanjš (1992./93.): *Matematičke zagonetke – logički zadatci*, Matka 1 , br. 4, str. 2–6.

5/ Ž. Hanjš, D. Žubrinić (2003. – 2004.): *Danilo Blanuša i njegov problem mladoženje*, MFL LIV 2 , 82–90.

6/ B. Kovačević (2011. – 2012.): *Najteža glavolomka na svijetu*, MFL LXII 3, str. 166–171.

7/ Z. Kurnik (2000.): *Logički zadatci*, Bilten Seminara iz matematike za nastavnike–mentore, 9. državni susret, HMD, Zagreb, str. 60–73.

8/ Z. Lobor (2010.): *Logika sudova – pogled na logički sklop iznutra*, Zbornik radova 4. kongresa nastavnika matematike, HMD, Zagreb, str. 379–390.

9/ M. Marić (2003./04.): *Logički zadatci*, Matka 12, br. 48, str. 232–235.

10/ I. Mrkonjić (2010.): *Metode rješavanja logičkih zadataka*, Zbornik radova 4. kongresa nastavnika matematike, HMD, Zagreb, str. 483–489.

11/ A. Muminagić (1994./95.): *Rješavanje logičkih zadataka rabljenjem grafa*, Matka 3, br. 12, str. 158–160.

12/ V. Šego (2009. – 2010.): *P=NP?*, MFL LX 4, str. 211–220.

13/ V. Volenec (1971. – 1972.): *Primjena algebre sudova na rješavanje nekih logičkih zadataka*, MFL XXII 1, str. 8–11.

14/ M. Vuković (2009.): *Matematička logika*, Element, Zagreb.