

Eksperimentalna vjerojatnost

ili "Kako se igrati na satu matematike?"



Ana Grozdanić, Varaždin

Prema propisanom Nastavnom planu i programu za prirodoslovno-matematičke gimnazije u četvrtom se razredu srednje škole proučavaju kombinatorika i vjerojatnost. Prema dosadašnjem iskustvu, pokazalo se da ta područja matematike nisu previše omiljena te sam tako nakon obrađene cjeline *Kombinatorika* odlučila napraviti drugačiji, zanimljiviji uvod u *Vjerojatnost*.

Prva gimnazija Varaždin, osim nacionalnog programa, nudi i pohađanje završnih dvaju razreda prema programu Međunarodne mature, tzv. IBDP. Matematika se u tom programu održava na dvije razine – višoj (izvorno *higher*) i osnovnoj (izvorno *standard*). Kao nastavnica koja predaje osnovnu razinu u IBDP programu, upoznata sam s programom i metodama koje se tamo provode. Osnovna razina bazira se na intuitivnom shvaćanju pojmova i koncepata te se do glavnih zaključaka najčešće dolazi kroz istraživanja (izvorno *Investigation*). Istraživanja su sastavni dio velikog broja lekcija te kroz jednostavne upute učenici vrlo lako dolaze do zaključaka, formula, pravila i slično. Tako sam došla i do ideje za uvod u *Vjerojatnost*. Također, kao dodatni izvor ideja često se koristim i društvenom mrežom *Pinterest*. Pet radnih listića, koje prikazujem u nastavku

i koje su riješili učenici 4. g razreda, napravljeno je prema mojim iskustvima iz IBDP nastave i idejama s *Pinteresta*.

Motivaciju na početku sata započela sam razgovorom o pojmovima kao što su "nemoguć događaj", "događaj koji se vjerojatno neće dogoditi", "događaj koji će se vjerojatno dogoditi" i "siguran događaj" koje su učenici opisali i objasnili pojavama iz svakodnevnog života. Učenici su kao primjer nemogućeg događaja naveli pojavu "kornjača će dobiti krila i poletjeti" dok su kao siguran događaj naveli "danas ću disati". Nakon toga objasnili smo razliku između teorijske i eksperimentalne vjerojatnosti. Učenike sam zamolila, na satu koji je prethodio, da na sljedeći sat sa sobom ponesu igraće kockice i *fidget spinner* te smo prema donesenom

Ana Grozdanić, prof., Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, anagrozd@yahoo.com

priboru formirali pet grupa. Ukratko sam im objasnila što se od njih očekuje, a s pojmovima kojima sam se na listiću koristila, učenici su već ranije bili upoznati. Naime, osim redovne nastave, jedan razred prirodoslovno-matematičke gimnazije iz svake generacije ima i *Izbornu nastavu matematike* te sam tako s učenicima 4. g razreda na izornoj nastavi prošle školske godine definirala osnovne statističke koncepte, a nekim statističkim konceptima koristila sam se na listićima. Također, veliki broj učenika iz ovog razreda prošle je školske godine pohađao *Statistiku* kao fakultativni predmet koji se provodi u našoj školi u sklopu projekta *Oснаživanje gimnazijskog obrazovanja provedbom kurikularne reforme STEM i ICT područja*.

Učenici prve grupe bacali su dvije kockice te bilježili zbrojeve dobivenih brojeva. Prije eksperimentalnog dijela učenici su, koristeći prikazane ishode

bacanja dviju kockica, trebali popuniti tablicu za očekivani broj pojavljivanja pojedinog zbroja prilikom bacanja para kockica 72 puta. Nakon toga bacili su kockice 72 puta i zabilježili dobivene rezultate. Naravno, s obzirom na to da su učenici bili podijeljeni u grupe po četiri ili više učenika, podijelili su posao popunjavanja tablica te su jako brzo objedinili rezultate unutar grupe.

Preostale četiri grupe radile su po sličnom principu, a u zadacima na listićima od njih se zahtijevalo bacanje jedne kockice, jednog ili dvaju novčića te okretanje *fidget spinnera*. *Fidget spinner* trebao im je poslužiti kao pokazivač određenog polja kruga, a kako sam po sebi on to nije, učenici su se dosjetili da na jedan rub *spinnera* zalijepe samoljepljivu naljepnicu nalik strelici koja će služiti kao pokazivač polja nakon što se *spinner* zavrti.

Bacanje dviju kockica

– teorijska vs.
eksperimentalna
vjerojatnost

1) Na gornjoj slici pokazani su mogući ishodi bacanja dviju kockica. Nakon što su kockice bačene, računamo sumu dobivenih brojeva. Popuni tablicu tako da upišeš udio dobivene sume u ukupnom broju ishoda, a zatim pretpostavimo da smo kockicu bacili 72 puta te zabilježi **očekivani** broj pojavljivanja pojedine sume.

suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
udio u ukupnom broju			$\frac{3}{36}$								
očekivana frekvencija											

2) Baci dvije kockice 72 puta. Zabilježe dobivene rezultate!

suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
„tally“											
frekvencija											
Relativna frekvencija											

Listić 1. Bacanje dviju kockica

Kao što sam već spomenula, učenici su zajednički popunili tablice, za što im nije trebalo puno vremena, a nakon toga svoje su zaključke iznijeli ostatku razreda. Zaključak do kojeg su sve grupe došle jest: ono što u teoriji od nekog pokusa očekujemo, može se i znatno razlikovati od rezultata dobive-

nih eksperimentalnim dijelom. Kako bi svi učenici imali pristup svim riješenim listićima, s njima sam dogovorila da ih objave u našoj zajedničkoj grupi u društvenoj mreži *Yammer*. *Yammerom* redovito komuniciram s učenicima i šaljem materijale koji su im potrebni za nastavu.

Bacanje novčića

– teorijska vs. eksperimentalna vjerojatnost

"glava"

"pismo"

1) Pretpostavimo da simetričan novčić bacamo 40 puta. Koliko puta **očekuješ** da će se pojaviti glava, a koliko pismo? Popuni tablicu s desne strane!

ishod	očekivana frekvencija	očekivana relativna frekvencija
glava		
pismo		

2) Baci novčić 40 puta. Zabilježi rezultate u tablicu!

ishod	„tally“	frekvencija	relativna frekvencija
glava			
pismo			

Listić 2. Bacanje novčića

Bacanje dvaju novčića

– teorijska vs. eksperimentalna vjerojatnost

"glava"

"pismo"

1) Pretpostavimo da dva novčića bacamo 60 puta. Koliko puta **očekuješ** da će se pojaviti dvije glave, 1 glava te niti jedna glava? Popuni tablicu s desne strane!

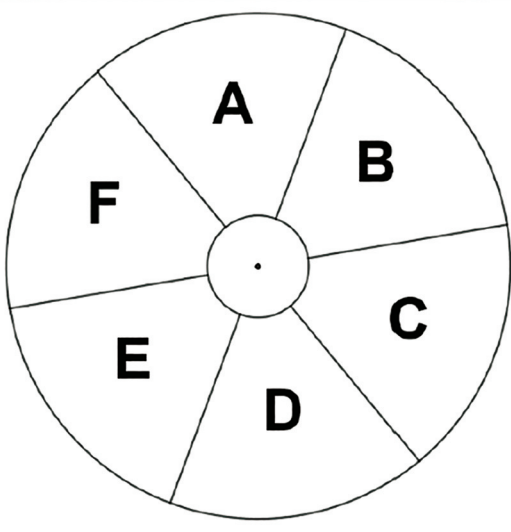
ishod	očekivana frekvencija	očekivana relativna frekvencija
2 glave		
1 glava		
niti jedna glava		

2) Baci dva novčića 60 puta. Zabilježi rezultate u tablicu!

ishod	„tally“	frekvencija	relativna frekvencija
2 glave			
1 glava			
pismo			

Listić 3. Bacanje dvaju novčića

Za izradu listića koristila sam se gotovim slikama novčića i kockica koje sam pronašla na internetu dok sam podlogu za *fidget spinner* izradila u programu *GeoGebra*. Učenici su se zabavili provodeći ove aktivnosti, a za čitavu aktivnost, uključujući i spomenuti uvod, bio nam je dovoljan jedan školski sat. Nakon provedenih aktivnosti, podijelila sam fotografije u grupi *Nastava matematike* društvene mreže *Facebook*, čiji sam član, te dobila brojne zahtjeve za podjelom radnih listića od kolega iz osnovnih i srednjih škola, čak i izvan Republike Hrvatske. Najveća zanimljivost kako kod učenika, tako i kod kolega, bio je, očekivano, *fidget spinner*.

Fidget spinner – teorijska vs. eksperimentalna vjerojatnost							
	1) Na gornjoj je slici prikazan krug koji je podijeljen na 6 sukladnih dijelova označenih slovima A, B, ..., F. Postavi <i>fidget spinner</i> u središte kruga i zamisli da smo ga zavrtjeli 60 puta. Popuni tablicu s očekivanim rezultatima.						
	ishod	A	B	C	D	E	F
	očekivana frekvencija						
	očekivana relativna frekvencija						
	ishod	A	B	C	D	E	F
	„tally“						
	frekvencija						
	relativna frekvencija						

Listić 4. *Fidget spinner*

Bacanje kockice – teorijska vs. eksperimentalna vjerojatnost							
1) Pretpostavimo da simetričnu kockicu bacamo 60 puta. Koliko puta očekuješ da će se pojaviti pojedini broj? Popuni tablicu s desne strane!	ishod	1	2	3	4	5	6
	očekivana frekvencija						
	očekivana relativna frekvencija						
2) Baci kockicu 60 puta. Zabilježi rezultate u tablicu!	ishod	1	2	3	4	5	6
	„tally“						
	frekvencija						
	relativna frekvencija						

Listić 5. Bacanje kockice