Singapurska metoda modela

Ljerka Jukić Matić, Osijek i
Ivan Širić, Žepče, BiH

Matematičko obrazovanje u Singapuru došlo je u središte zanimanja zapadnih zemalja nakon što su singapurski učenici ostvarili značajne uspjehe u međunarodnim studijama TIMSS i PISA.

Glavni cilj singapurskog matematičkog obrazovanja je razvoj matematičkih sposobnosti učenika, posebno njihove sposobnosti rješavanja problema. Kurikulum je izgrađen tako da se u samom središtu nalazi rješavanje matematičkih problema, a ono uključuje poznavanje i primjenu matematičkih koncepata i vještina u raznim situacijama: rutinskim i nerutinskim zadatcima, zadatcima otvorenog tipa i problemima iz svakodnevnog života [1].

Osamdesetih godina prošlog stoljeća uočeno je kako singapurski učenici imaju velikih poteškoća u razumijevanju i rješavanju matematičkih problema zadanih riječima. Stoga je osnovan tim *Primary Mathematics Project* na čijem je čelu bio dr. Kho Tek Hong. Njihov zadatak bio je izraditi nastavne materijale za poučavanje i učenje matematike u osnovnoj školi s učinkovitim nastavnim pristupom. Nastavni materijali bili su temeljeni na pristupu J. Brunera *konkretno-slikovno-apstraktno*. U ovom pristupu učenici koriste konkretne objekte i slikovne prikaze kako bi predstavili matematičke veličine (poznate i nepoznate) i njihove međusobne odnose dane u zadatku kako bi sami riješili zadatak. Ti slikovni prikazi su zapravo pravokutnici.

Metoda modela uči se u ranim godinama osnovne škole i koristi tijekom školovanja kao osnovna strategija za rješavanje problemskih zadataka koji uključuju prirodne brojeve, razlomke, decimalne brojeve, omjere i postotke. Ova metoda potiče učenika na višestruku primjenu razmišljanja i zaključivanja [2]. Metoda modela zasniva se na dva osnovna modela: *model dio-cjelina* i *model usporedbe*.

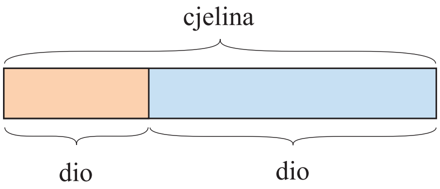
Model dio-cjelina

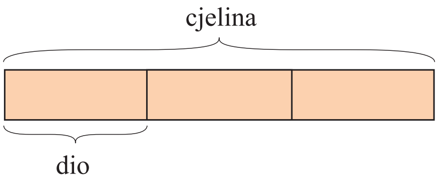
Model dio-cjelina može se koristiti za rješavanje problemskih zadataka koji uključuju četiri osnovne

doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić, Odjel za Matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, `ljukic@mathos.hr`
Ivan Širić, mag. educ. math. et inf., KŠC "Don Bosco", Žepče, Bosna i Hercegovina, `isiric93@gmail.com`

operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje gdje su dani:

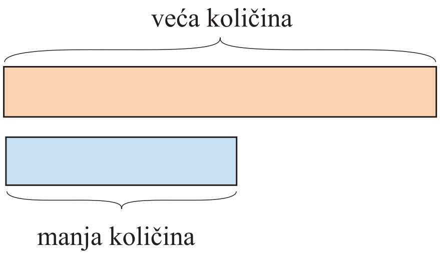
- dva dijela, a njihovim se zbrajanjem dobije cjelina
- cjelina i dio, a oduzimanjem se dobije drugi dio
- dijelovi jednake vrijednosti, a množenjem jednog dijela i broja dijelova dobije se cjelina
- cjelina i broj jednakih dijelova, a dijeljenem se dobije vrijednost jednog dijela.

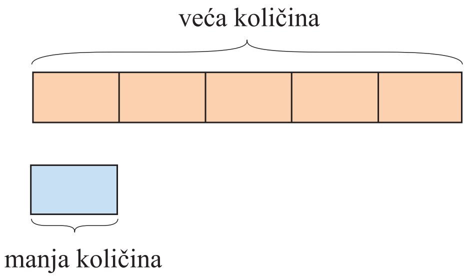




Model usporedbe

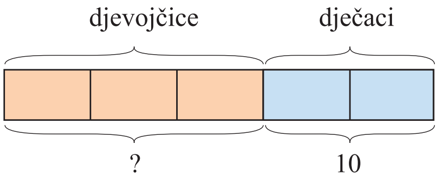
U zadatcima koji u sebi sadrže izraze *više od* i *manje od* koristi se model usporedbe za zbrajanje i oduzimanje. Operacija zbrajanja koristi se kako bi se pronašla ukupna vrijednost dviju veličina. Operacija oduzimanja koristi se kako bi se pronašla razlika između dviju veličina, kao i jedna veličina ako je zadana druga veličina i razlika između njih. Model usporedbe gdje su jedinice (dijelovi) jednakih vrijednosti ukazuje na korištenje operacija množenja ili djeljenja, ovisno koje su veličine dane.





Proces rješavanja problemskih zadataka u kojima se koristi metoda modela omogućuje učenicima da razumijevanje problema iskažu vizualnim prikazom. Jednostavan proces modeliranja pomaže im analizirati veze između poznatih i nepoznatih veličina u zadatku prije nego li odluče kako će riješiti zadatak i koje će od četiriju operacija koristiti. Pogledajmo kako to izgleda na primjeru:

Primjer 1. *U razredu ima* $\frac{3}{5}$ *djevojčica. Ostatak razreda čine dječaci kojih ima ukupno* 10*. Koliko je djevojčica u razredu?*



Imamo 10 dječaka, pa vrijedi:

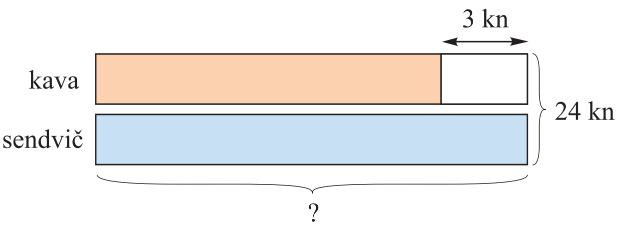
$$\begin{aligned} 2 \text{ jedinice } &= 10 \\ 1 \text{ jedinica } &= 10 : 2 = 5 \\ 3 \text{ jedinice } &= 3 \cdot 5 = 15. \end{aligned}$$

U razredu ima 15 djevojčica.

Za ovaj zadatak učenici bi automatski mogli napisati $\frac{3}{5} \cdot 10$ kao rješenje. To odaje slabo razumijevanje veza između danih veličina u zadatku. Broj 10 nije veličina koja predstavlja svu djecu. Koristeći metodu modela, problem postaje vizualno jasan i učenici su u mogućnosti riješiti dani problem. Još važnije, metoda modela bolje predstavlja koncept razlomaka i daje učenicima sliku za bolje razumijevanje veličina koje su zadane, te njihovih međusobnih odnosa, kao i zašto $\frac{3}{5} \cdot 10$ nije točno rješenje.

U nižim razredima osnovne škole učenici su često ograničeni postupcima koje imaju na raspolaganju za rješavanje zadataka jer još nisu učili algebru i algebarske manipulacije. Primjer 2 prikazuje zadatak koji učenici mogu riješiti prije nego su se upoznali s algebrom.

Primjer 2. *Sendvič i kava koštaju* 21 *kunu. Kava je* 3 *kune jeftinija od sendviča. Koliko košta sendvič?*



Prvi pravokutnik je produžen kako bi bio jednake duljine kao drugi. Njihova ukupna vrijednost je:

$$21 + 3 = 24.$$

Prema tome,

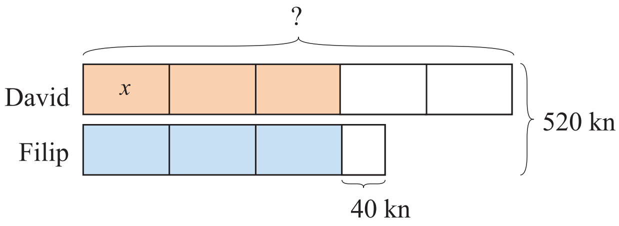
$$\begin{aligned} 2 \text{ jedinice } &= 24 \\ 1 \text{ jedinica } &= 24 : 2 = 12. \end{aligned}$$

Sendvič košta 12 kuna.

U višim razredima osnovne škole, te u srednjoj školi, metoda modela se može proširiti na algebru kao vizualni pristup, s ciljem da učenici razumiju i lakše postave jednadžbe. Pogledajmo primjer:

Primjer 3. *David i Filip imaju* 520 *kuna zajedno. Ako David potroši* $\frac{2}{5}$ *svog novca na nove hlače i Filip potroši* 40 *kuna na nove rukavice, tada je obojici ostala jednaka količina novaca. Koliko je novaca imao David prije nego je kupio nove hlače?*

Ovdje je korišten model usporedbe. Obojeni dijelovi predstavljaju dva preostala iznosa novaca koji su jednaki.



Ako se sa x označi vrijednost jednog pravokutnika, onda slijedi:

$$\begin{aligned} 5x + 3x + 40 &= 520 \\ 8x &= 480 \\ x &= 60 \\ 5x &= 300. \end{aligned}$$

David je prije kupovine imao 300 kuna.

Singapurska metoda modela na važnosti je dobila nakon što je Singapur bio prvi na TIMSS istraživanju 1995. godine, a zatim i 1999. i 2003. godine. No, postoje i protivnici metode modela koji tvrde da učenici tako uče jednu stvar više puta te da korištenje više metoda za rješavanje zadataka samo zbunjuje učenike. Također, neki nastavnici u srednjim školama metodu modela smatraju previše običnom, jednostavnom, ne-algebarskom i tvrde da je ona prepreka u učenju simboličke algebre. Mnogo vremena i truda uloži se kako bi se naučila metoda modela u prvim godinama školovanja.

Jedno od glavnih pitanja je pomaže li metoda modela u učenju algebre i na koji način. Dvadesetak godina nakon uvođenja metode modela u singapurske škole, povedeno je istraživanje u kojem je ispitano kakvi se kognitivni procesi događaju prilikom korištenja metode modela i simboličkih manipulacija [3]. Kako bi se napravilo temeljito istraživanje o ovom problemu, provedena su dva eksperimenta koristeći se funkcionalnim snimanjem mozga magnetskom rezonancijom. U oba eksperimenta sudjelovalo je 18 istih odraslih ispitanika koji su prethodno bili testirani jesu li dovoljno kompetentni za rješavanje problema metodom modela i algebarskim tehnikama.

Prvi eksperiment bio je fokusiran na početne faze rješavanja algebarskih problema, tj. na procese povezane s prikazom problema. Ispitanicima su dani zadatci riječima, a nakon svakog pitanja uslijedio je prikaz rješenja bilo u obliku modela ili u obliku jednadžbe. Od ispitanika se tražilo da usporede prikazano rješenje i ono koje su oni imali na umu te da odrede je li prikazano rješenje točno. Drugi eksperiment bio je fokusiran na oblikovanje rješenja. Ispitanicima su predstavljeni ili prikazi modela ili

4.3 Real-World Problems: Ratios

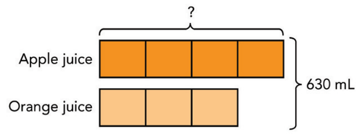
Lesson Objective

- Solve real-world problems involving ratios.

Learn **Draw models to solve problems involving ratios.**

Megan prepares a fruit punch using apple juice and orange juice in the ratio 4 : 3.

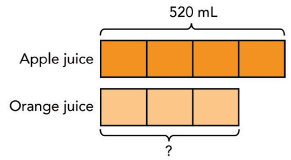
a) If the total volume of the fruit punch is 630 milliliters, find the volume of apple juice Megan uses.



Volume of apple juice : Volume of orange juice = 4 : 3
Total volume of fruit punch = 4 + 3 = 7 units
7 units $\longrightarrow$ 630 mL
1 unit $\longrightarrow \frac{630}{7}$ = 90 mL
4 units $\longrightarrow$ 4 × 90 = 360 mL

Megan uses 360 milliliters of apple juice.

b) If Megan uses 520 milliliters of apple juice to make the fruit punch, find the volume of orange juice she uses.



Volume of apple juice : Volume of orange juice = 4 : 3
4 units $\longrightarrow$ 520 mL
1 unit $\longrightarrow \frac{520}{4}$ = 130 mL
3 units $\longrightarrow$ 3 × 130 = 390 mL

Megan uses 390 milliliters of orange juice.

140 **Chapter 4** Ratio

Stranica iz singapurskog udžbenika za američko tržište (*Math in Focus*) jednadžbe i od njih se tražilo da izračunaju rješenja. U oba eksperimenta simbolički je pristup više aktivirao područja odgovorna za radno pamćenje nego što ih je aktivirala metoda modela. Ta činjenica sugerira da se upotreba simboličkih algebarskih manipulacija oslanja na prisjećanje procedura, što zapravo govori da se rješavanje zadataka simboličkim metodama svodi na već naučene automatske procese, dok se metodom modela svakom problemu posebno pristupa. Prema tome primjenom metode modela učenici koriste misaone vještine i heuristike za rješavanje problema te tako bolje razumiju i rješavaju matematičke, a time i algebarske probleme.

Neke zemlje poput SAD-a (*Math in Focus*) i Velike Bitanije (*Inspire Maths*) preuzele su singapurske udžbenike iz matematike i prilagodili ih svom kurikulumu, želeći postići bolje rezultate matematičkog obrazovanja. No uspjeh singapurskih učenika ne treba pripisivati samo metodi modela, već i njihovom stavu prema matematici. Sadašnji okvir singapurskog matematičkog kurikuluma osmišljen je 1990. godine, no sam se kurikulum revidira i nadograđuje svakih pet godina, jer se matematika smatra temeljem tehnološkog razvoja. Kao primjer tehnološke moći istaknimo kako od susjedne Malezije uvoze prljavu vodu, pročišćavaju je i zatim je tako pročišćenu prodaju natrag Maleziji. I sam broj sati matematike u školi, koji se kreće od 7 do 13 u osnovnoj školi i 5 do 7 u srednjoj školi, te stava da slabiji učenici trebaju više sati matematike, govore o važnosti matematike u singapurskoj kulturi.

Uspjeh Singapura zasnovan je prije svega na marljivom radu i uloženom trudu nastavnika i učenika, robusnom kurikulumu te na cjelokupnom sustavu koji vrlo brzo identificira učenike s poteškoćama i odmah intervenira [5].

LITERATURA

1/ Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education, Singapore (2009.). The Singapore model method. Singapore: EPB Pan Pacific.

2/ Y. M. Liu, V. L. Soo (2014.): Mathematical Problem Solving – The Bar Model Method. Scholastic Education International (Singapore).

3/ K. Lee, S. W. Ng (2009.): Solving Algebra Word Problems: The Roles of Working Memory and the Model Method. K. Y. Wong, P. Y. Lee, B. Kaur, P. Y. Foong and S. F. Ng (Eds.), Mathematics Education: The Singapore Journey (str. 204–226). Singapore: World Scientific Publishing.

4/ K. Y. Wong, N. H. Lee (2009.): Singapore Education and Mathematics Curriculum. U K. Y. Wong, P. Y. Lee, B. Kaur, P. Y. Foong and S. F. Ng (Eds.), Mathematics Education: The Singapore Journey (str. 13–47). Singapore: World Scientific Publishing.

5/ F. Cheam, W. L. J. Chua (2009.): Early Intervention for Pupils At-risk of Mathematics Difficulties. U K. Y. Wong, P. Y. Lee, B. Kaur, P. Y. Foong and S. F. Ng (Eds.), Mathematics Education: The Singapore Journey (str. 370–386). Singapore: World Scientific Publishing.

6/ I. Širić (2017.): *Singapurska metoda modela*. Diplomski rad, Osijek: Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.

Netko otkrije svoje slabosti kroz učenje; netko pronađe svoje teškoće kroz poučavanje. Kod prepoznavanja slabosti možemo promišljati o sebi; kroz savladavanje teškoća u mogućnosti smo razviti se. Stoga se kaže da se poučavanje i učenje međusobno obogaćuju.

(Konfucije)

Kada je očito da se ciljevi ne mogu doseći, ne mijenjaj ciljeve. Prilagodi korake.

(Konfucije)