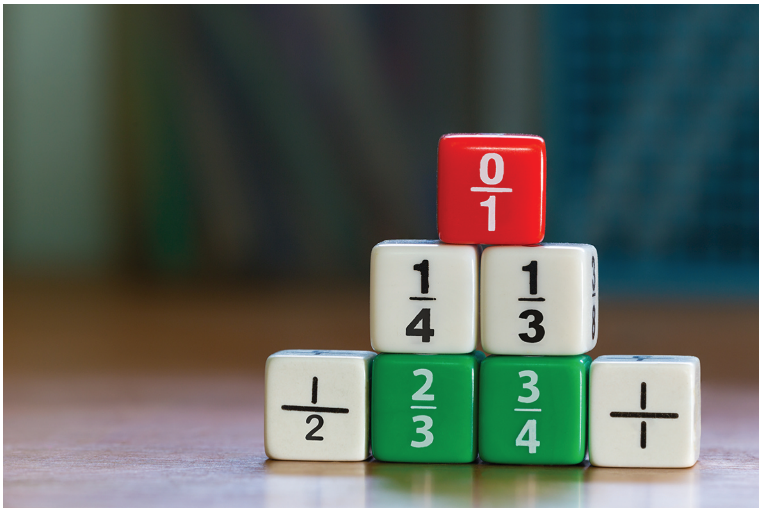
Fareyev niz

Radomir Lončarević, Zagreb



Osobitu ulogu u matematici imaju nizovi brojeva. Kroz školovanje upoznali smo primjere aritmetičkih, geometrijskih nizova, Fibonaccijev niz itd. U ovom članku prikazat ćemo Fareyev niz, neka njegova korisna svojstva te primjene pri rješavanju linearnih diofantskih jednadžbi i aproksimaciji iracionalnih brojeva.

1. Povijest Fareyeva niza

Za vrijeme Francuske revolucije Francuska prelazi na metrički sustav te se stoga svaki racionalan broj iz zapisa s pomoću razlomka morao pretvoriti u decimalan zapis. Taj je posao morao odraditi Charles Haros, geometar zaposlen u Francuskom državnom uredu za katastarske poslove. U izradi tablice pretvorbe morao je identificirati sve potpuno skraćene razlomke s nazivnikom manjim od 100. Uspio je pronaći algoritam za pronalazak svih razlomaka, a algoritam je danas poznat kao pronalaženje *medianta* i koristi se za određivanje novog potpuno skraćenog razlomka koji se nalazi između dva već postojeća potpuno skraćena razlomka. Godine 1802. Haros je uspio dokazati da ako krene s nizom

$$\frac{1}{99}, \frac{1}{98}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{97}{98}, \frac{98}{99}$$

i za svaki par razlomaka nađe *mediant* na način da zapisuje samo one razlomke nazivnika manjeg od 100, dobit će svih 3003 traženih razlomaka. Da povijest bude zanimljivija, svojstva *medianta* nije prvi pronašao Haros, već 150 g. ranije francuski matematičar Nicolas Chuquet. Isto tako je 15 g. ranije Britanac Henry Goodwyn, inače vlasnik pivnice, koji se u slobodno vrijeme bavio izradom matematičkih tablica, napravio tablicu sličnu Harosovoj, ali s razlomcima koji su imali nazivnike od 1 do 1024. Njegov rad prezentiran je tek 25. travnja 1816. g. ispred Londonskog kraljevskog društva za unapređenje znanosti i otisnut je za privatnu upotrebu. Nedugo nakon Goodwynove prezentacije, geolog John Farey piše pismo za *Philosophical Magazine and Journal* u kojem govori o nizu potpuno skraćenih razlomaka nazivnika manjih od zadanog broja n gdje je uočio da je svaki član niza *mediant* svojih susjeda. On nije znao da je već 1791. Haros uočio i dokazao to svojstvo. Augustin Cauchy, nakon što je pročitao Fareyevo pismo, uspijeva dokazati uočeno svojstvo i objavljuje ga u *Exercises de mathematique*. On također nije znao za Harosev rad te je u objavi svog rada rezultat posvetio Fareyu umjesto Harosu. Upravo zbog toga mnogi matematičari imaju rezerve o Fareyevu doprinosu matematici.

Radomir Lončarević, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, `radomir.loncarevic@gmail.com`

2. Fareyev niz

2.1. Definicije i primjeri

Definicija 2.1. Neka je $n \in \mathbf{N}$. Fareyev niz F_n reda n je niz svih racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$, gdje su p i q cijeli brojevi takvi da je $0 \leq p \leq q \leq n$, i $nzd(p,q) = 1$, zapisanih u rastućem redoslijedu.

Primjer 1. Odredimo Fareyeve nizove do šestog reda.

$F_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

$F_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$

$F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$

$F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$

$F_5 = \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$

$F_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$

Na internetskoj stranici [5] možete pronaći kalkulator Fareyevih nizova.

Definicija 2.2. Neka su $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$. Razlomak $\frac{a+c}{b+d}$ naziva se *mediant* razlomaka $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$.

Iako je pojam *medianta* povijesno stariji od Fareyeva niza, on se ipak najviše koristi i povezuje s Fareyevim nizom.

Primjer 2. U Fareyevu nizu F_5 odredimo *mediant* razlomaka $\frac{4}{5}$ i $\frac{1}{1}$.

$$\frac{4+1}{5+1} = \frac{5}{6}$$

Primijetite da se razlomak $\frac{5}{6}$ ne nalazi u nizu F_5, ali se nalazi u nizu F_6 i to između razlomaka $\frac{4}{5}$ i $\frac{1}{1}$. Tako je određivanjem *medianta* definiran i redoslijed razlomaka $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ i $\frac{1}{1}$ u nizu F_6. Svaki razlomak u Fareyevu nizu F_n, osim $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$, dobiven je kao *mediant* svojih susjednih razlomaka. U sljedećem primjeru opisat ćemo algoritam kojim su se Haros i Farey koristili za konstrukciju Fareyeva niza i to za $n \leq 4$.

Primjer 3. Primjenom definicije *medianta* odredimo F_2, F_3 i F_4. Krenimo s Fareyevim nizom prvog reda $F_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$. Odredimo *mediant* razlomaka $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$.

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Sada je $F_2 = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$. Odredimo *mediante* razlomaka $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{2}$ te $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{1}$.

$$\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3} \quad \text{i} \quad \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

Sada je $F_3 = \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$. Odredimo *mediante* svaka dva uzastopna razlomka u F_3.

$$\frac{0+1}{1+3} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5} \qquad \frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}$$

Sada je $F_4 = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$. Razlomci $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{5}$ nisu članovi niza F_4, jer im je nazivnik veći od reda niza.

Općenito, Fareyev niz F_n dobiva se računanjem *medianta* svaka dva uzastopna člana niza F_{n-1}, tako dugo dok je nazivnik dobivenog *medianta* manji od ili jednak n.

Zadatak 1. Odredite F_7 i F_8 koristeći se definicijom *medianta*.

2.2. Svojstva Fareyeva niza

U ovom dijelu dokazat ćemo nekoliko važnih svojstava *medianta* i Fareyeva niza.

Propozicija koja slijedi predstavlja svojstvo *medianta*.

Propozicija 2.1. Neka su $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbf{Q}^+$. Ako je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, onda je $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Dokaz. Budući da je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, onda je $bc - ad > 0$. Sada je $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$ i $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} > 0$. Odakle slijedi tražena nejednakost. ∎

Dokaz Propozicije 2.2 i Teorema 2.1 koji slijede možete pronaći u [4].

Propozicija 2.2. Dva uzastopna elementa u Fareyevu nizu F_n, $n > 1$ ne mogu imati isti nazivnik.

Teorem 2.1. Racionalni brojevi $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ su dva uzastopna elementa Fareyeva niza F_n ako i samo ako je

$$bc - ad = 1. \tag{1}$$

Dokažimo neke jednostavne posljedice Teorema 2.1.

Korolar 2.1. Ako su $\frac{a}{b}, \frac{r}{s}, \frac{c}{d}$ tri uzastopna elementa Fareyeva niza F_n, onda je $\frac{r}{s} = \frac{a+c}{b+d}$.

Dokaz. Budući da su $\frac{a}{b}, \frac{r}{s}, \frac{c}{d}$ uzastopni elementi Fareyeva niza F_n, prema Teoremu 2.1 vrijedi $br - as = 1$ i $sc - rd = 1$. Oduzimanjem druge jednakosti od prve dobivamo $r(b+d) - s(a+c) = 0$, odnosno $\frac{r}{s} = \frac{a+c}{b+d}$. ∎

Korolar 2.2. Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dva uzastopna elementa Fareyeva niza F_n, onda je $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$.

Dokaz. Primjenom Teorema 2.1 dobivamo

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} = \frac{1}{bd}.$$ ∎

Korolar 2.3. Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{r}{s}$ uzastopni elementi Fareyeva niza F_n, onda je element koji slijedi odmah nakon $\frac{r}{s}$ u nizu F_n jednak

$$\frac{\left\lfloor \frac{n+b}{s} \right\rfloor r - a}{\left\lfloor \frac{n+b}{s} \right\rfloor s - b}. \tag{2}$$

Dokaz. Označimo li sa $\frac{c}{d}$ element koji slijedi nakon $\frac{r}{s}$, onda je zbog Korolara 2.1 $\frac{r}{s} = \frac{a+c}{b+d}$. Kako je $\frac{r}{s}$ potpuno skraćeni razlomak, a $\frac{a+c}{b+d}$ nije nužno, onda mora postojati cijeli broj k takav da je $a + c = kr$ i $b + d = ks$. Kako je $d = ks - b \le n$ i k najveći mogući, imamo $k = \left\lfloor \frac{n+b}{s} \right\rfloor$. Sada je

$$\frac{c}{d} = \frac{kr-a}{ks-b} = \frac{\left\lfloor \frac{n+b}{s} \right\rfloor r - a}{\left\lfloor \frac{n+b}{s} \right\rfloor s - b}.$$ ∎

Korolar 2.3 može se koristiti za određivanje elemenata Fareyeva niza F_n oko bilo kojeg zadanog elementa niza.

Primjer 4. Odredimo prva tri elementa u Fareyevu nizu reda 500 nakon razlomka $\frac{13}{202}$.

Rješenje. Neka su $\frac{13}{202}$ i $\frac{c}{d}$ uzastopni elementi niza F_{500}. Prema Teoremu 2.1 imamo $202c - 13d = 1$. Primjenom Euklidova algoritma dobivamo sva cjelobrojna rješenja $(c, d) = (2+13k, 31+202k), k \in \mathbf{Z}$. Kako je $n = 500$, najveći mogući k je jednak 2 te je $(c, d) = (28, 435)$. Time dobivamo prvi od triju traženih članova $\frac{28}{435}$. Primjenom formule (2) na uzastopne elemente $\frac{13}{202}$ i $\frac{28}{435}$

$$\left\lfloor \frac{500+202}{435} \right\rfloor \cdot 28 - 13 = 15$$
$$\left\lfloor \frac{500+202}{435} \right\rfloor \cdot 435 - 202 = 233,$$

dobivamo drugi traženi razlomak $\frac{15}{233}$. Ponovnom primjenom formule (2) na uzastopne elemente $\frac{28}{435}$ i $\frac{15}{233}$ dobivamo treći traženi razlomak $\frac{32}{497}$. Prema tome traženi članovi su $\frac{28}{435}, \frac{15}{233}$ i $\frac{32}{497}$.

Sljedeća dva zadatka namijenjena su čitateljima.

Zadatak 2. Pronađite sve elemente Fareyeva niza reda 95 koji se nalaze između razlomaka $\frac{5}{33}$ i $\frac{13}{56}$.

Zadatak 3. Odredite četiri uzastopna elementa Fareyeva niza reda 520 nakon razlomka $\frac{23}{303}$.

3. Primjene Fareyeva niza

3.1. Rješavanje linearnih diofantskih jednadžbi

U ovom dijelu pokazat ćemo kroz primjere kako nam Fareyevi razlomci mogu pomoći pri rješavanju linearnih diofantskih jednadžbi, a za kraj će biti dan i algoritam za rješavanje.

Teorem 3.1. Neka su a, b i n cijeli brojevi, takvi da je najveći zajednički djelitelj od a i b jednak 1. Ako je jedno rješenje jednadžbe

$$ax - by = n \qquad (3)$$

jednako $(x, y) = (c, d)$, onda su sva rješenja dana sa $x = c + bk$ i $y = d + ak, k \in \mathbf{Z}$.

Dokaz Teorema 3.1 možete vidjeti u [3].

Primjer 5. Riješite diofantsku jednadžbu $3x-7y=1$.

Rješenje. Primjenom Teorema 2.1 imamo da su $\frac{y}{x}$ i $\frac{3}{7}$ dva uzastopna elementa Fareyeva niza. Kako je nazivnik većeg razlomka jednak 7, razlomak $\frac{y}{x}$ tražimo u Fareyevu nizu F_7. Iz niza

$$F_7 = \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$$

uočavamo da je $\frac{y}{x} = \frac{2}{5}$. Stoga je partikularno rješenje $(x, y) = (5, 2)$, što je lako provjeriti. Konačno je rješenje prema Teoremu 3.1 jednako $(x, y) = (5 + 7k, 2 + 3k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Riješimo nekoliko primjera gdje je n različito od jedan.

Primjer 6. Riješite diofantsku jednadžbu $3x-7y=4$.

Rješenje. Partikularno rješenje iz prethodnog zadatka pomnožimo sa $n = 4$ pa je partikularno rješenje nove jednadžbe $(x, y) = (20, 8)$, a konačno $(20 + 7k, 8 + 3k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 7. Riješite diofantsku jednadžbu $5x-2y=3$.

Rješenje. Nađimo partikularno rješenje jednadžbe $5x - 2y = 1$. Primjenom Teorema 2.1 imamo da su $\frac{2}{5}$ i $\frac{x}{y}$ dva uzastopna elementa niza F_5. Iz F_5 očitamo da je $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. Sada je partikularno rješenje jednadžbe $5x - 2y = 1$, $(x, y) = (1, 2)$. Partikularno rješenje početne jednadžbe jest $(x, y) = (3, 6)$, a konačno $(x, y) = (3 + 2k, 6 + 5k), k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 8. Riješite diofantsku jednadžbu $2y-3x=4$.

Rješenje. Prvo tražimo rješenje jednadžbe $2y - 3x = 1$. Primjenom Teorema 2.1 imamo da su $\frac{x}{y}$ i $\frac{2}{3}$ dva uzastopna elementa Fareyeva niza F_3. Iz F_3 očitamo da je $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. Stoga je $(x, y) = (1, 2)$ partikularno rješenje jednadžbe $2y-3x = 1$. Konačno rješenje našeg zadatka jednako je $(4+2k, 8+3k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primjer 9. Riješite diofantsku jednadžbu $4y-x=2$.

Rješenje. Nađimo partikularno rješenje jednadžbe $4y - x = 1$. Primjenom Teorema 2.1 imamo da su $\frac{1}{4}$ i $\frac{y}{x}$ dva uzastopna razlomka u nizu F_4. Iz F_4 očitamo da je $\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$. Stoga je $(x, y) = (3, 1)$ partikularno rješenje jednadžbe $4y - x = 1$. Konačno rješenje početne jednadžbe $(x, y) = (6 + 4k, 2 + k)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Primijetite da poznavanje Fareyeva niza može uvelike olakšati i ubrzati rješavanje linearnih diofantskih jednadžbi oblika (3).

Napomena 3.1. *Na temelju riješenih primjera, možemo opisati postupak rješavanja linearnih diofantskih jednadžbi oblika 3 s pomoću Fareyeva niza:*

1. *Neka je $a, b > 0$ i $n = 1$.*

a) Ako je $a < b$, onda u Fareyevu nizu F_b tražimo razlomak $\frac{y}{x}$ takav da su $\frac{y}{x}$ i $\frac{a}{b}$ dva uzastopna elementa niza F_b. Ako je to $\frac{y_0}{x_0}$, onda je partikularno rješenje $(x, y) = (x_0, y_0)$, a konačno rješenje jednadžbe $(x_0 + bk, y_0 + ak)$, $k \in \mathbf{Z}$.

b) *Ako je $a > b$, onda u Fareyevu nizu F_a tražimo razlomak $\frac{x}{y}$ takav da su $\frac{b}{a}$ i $\frac{x}{y}$ dva uzastopna elementa niza F_a. Ako je to $\frac{x_0}{y_0}$, onda je partikularno rješenje $(x, y) = (x_0, y_0)$, a konačno rješenje jednadžbe $(x_0 + bk, y_0 + ak)$, $k \in \mathbf{Z}$.*

2. *Neka je $a, b < 0$ i $n = 1$.*

a) *Ako je $a < b$, onda u Fareyevu nizu $F_{|a|}$ tražimo razlomak $\frac{x}{y}$ takav da su $\frac{x}{y}$ i $\frac{b}{a}$ dva uzastopna elementa niza $F_{|a|}$. Ako je to $\frac{x_0}{y_0}$, onda je partikularno rješenje $(x, y) = (x_0, y_0)$, a konačno rješenje jednadžbe $(x_0 + bk, y_0 + ak)$, $k \in \mathbf{Z}$.*

b) *Ako je $a > b$, onda u Fareyevu nizu $F_{|b|}$ tražimo razlomak $\frac{y}{x}$ takav da su $\frac{a}{b}$ i $\frac{y}{x}$ dva uzastopna elementa niza $F_{|b|}$. Ako je to $\frac{y_0}{x_0}$, onda je partikularno rješenje $(x, y) = (x_0, y_0)$, a konačno rješenje jednadžbe $(x_0 + bk, y_0 + ak)$, $k \in \mathbf{Z}$.*

3. *Ako je $n \neq 1$, onda njime pomnožimo partikularno rješenje dobiveno za jednadžbu u kojoj je $n = 1$ pa je konačno rješenje $(nx_0 + bk, ny_0 + ak)$.*

Ako je $\mathrm{nzd}(a, b, n) = d$, jednadžbu podijelimo sa d i primijenimo prethodno opisani postupak.

U ovom radu nije promatran slučaj $a < 0$, $b > 0$ i $a > 0$, $b < 0$. Takav bi slučaj zahtijevao proširenje Fareyeva niza na negativne racionalne brojeve.

Zadatak 4. Riješite sljedeće linearne diofantske jednadžbe s pomoću Fareyeva niza:

a) $3x - y = 5$

b) $-4x + 5y = 3$

c) $14y - 4x = 6$.

3.2. Aproksimacija iracionalnih brojeva

U ovom dijelu opisat ćemo postupak kojim se za dani iracionalni broj može pronaći aproksimacija odgovarajuće preciznosti koristeći se Fareyevim nizom. Neka je dan iracionalan broj x iz intervala $\langle 0, 1 \rangle$. Za tako odabrani broj vrijedi $\frac{0}{1} < x < \frac{1}{1}$. Pronađemo *mediant* od $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$, što je $\frac{1}{2}$. Početni interval je sada podijeljen na dva podintervala $\left\langle \frac{0}{1}, \frac{1}{2} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\rangle$. Broj x nalazi se u jednom od tih dvaju podintervala. Nakon što smjestimo x u odgovarajući podinterval, postupak traženja *medianta* se nastavlja do aproksimacije odgovarajuće preciznosti. Pod preciznošću se ovdje misli da je nazivnik *medianta* manji od ili jednak redu Fareyeva niza F_n.

Primjer 10. Odredite aproksimaciju broja $\frac{1}{\sqrt{7}}$ Fareyevim nizom reda:

1. 200 **2.** $10\,000$.

Uz pomoć računala dobivamo

$$\frac{1}{\sqrt{7}} = 0.3779644730092272\ldots$$

Rješenje. Neka je $x = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Primijenimo gore opisani postupak.

1.
$$\begin{aligned}\frac{0}{1} < x < \frac{1}{1} &\Rightarrow \frac{0}{1} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\\ &\Rightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{2}{5} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{17}{45} < x < \frac{31}{82}\\ &\Rightarrow \frac{48}{127} < x < \frac{31}{82} \Rightarrow \frac{48}{127} < x < \frac{79}{209}\end{aligned}$$

Postupak završavamo jer je nazivnik posljednjeg *medianta* veći od 200. Najbolja dobivena aproksimacija zadanog broja je razlomak

$$\frac{48}{127} = 0.3779527559055118\ldots$$

2. Nastavljamo postupak.

$$\frac{48}{127} < x < \frac{127}{336} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{271}{717} < x < \frac{494}{1307}$$
$$\Rightarrow \frac{765}{2024} < x < \frac{494}{1307} \Rightarrow \frac{765}{2024} < x < \frac{1259}{3331}$$
$$\Rightarrow \ldots \frac{765}{2024} < x < \frac{2789}{7379} \Rightarrow \frac{765}{2024} < x < \frac{3554}{9403}$$

Postupak se završava jer bi nazivnik sljedećeg *medianta* bio veći od $10\,000$. Najbolja aproksimacija zadanog broja jest

$$\frac{3554}{9403} = 0.3779644794214612\ldots$$

Preciznost aproksimacije je to bolja što je redni broj Fareyeva niza veći.

Sljedeći zadatak namijenjen je čitateljima.

Zadatak 5. Pronađite aproksimaciju broja $\frac{1}{\pi}$ za Fareyev niz reda $10\,000$.

3.3. Fibonnacijevi razlomci

Za kraj rada iskazat i dokazat ćemo teorem koji nam daje vezu Fareyeva niza i niza Fibonnacijevih razlomaka.

Fibonnacijev niz dan je rekurzivnom relacijom $\mathsf{F}_n = \mathsf{F}_{n-2} + \mathsf{F}_{n-1}, n \geq 3$, gdje je $\mathsf{F}_1 = 1$ i $\mathsf{F}_2 = 1$ pa su članovi niza

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Definicija 2.1. Fibonnacijev razlomak definiran je kao omjer članova Fibonnacijevog niza $\frac{\mathsf{F}_n}{\mathsf{F}_{n+2}}$, gdje je $n \geq 1$. Niz Fibonnacijevih razlomaka

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \ldots, \frac{\mathsf{F}_n}{\mathsf{F}_{n+2}}, \frac{\mathsf{F}_{n+1}}{\mathsf{F}_{n+3}}, \ldots$$

Iz definicije Fibonnacijeva niza slijedi da je svaki član niza Fibonnacijevih razlomaka, osim prva dva, *mediant* svojih prethodnika. U sljedećem teoremu iskazat ćemo vezu Fareyeva niza i niza Fibonnacijevih razlomaka.

Teorem 3.2. Ako su dva razlomka uzastopna u nizu Fibonnacijevih razlomaka, onda su oni uzastopni i u Fareyevu nizu.

Dokaz. Neka su $\frac{\mathsf{F}_n}{\mathsf{F}_{n+2}}$ i $\frac{\mathsf{F}_{n+1}}{\mathsf{F}_{n+3}}$ uzastopni razlomci u nizu Fibonnacijevih razlomaka. Potrebno je dokazati da razlomci zadovoljavaju Teorem 2.1. Kako razlomci u Fibonnacijevom nizu razlomaka nisu zapisani u rastućem poretku, zahtijevat ćemo $|bc - ad| = 1$. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za $n = 1$ imamo

$$|\mathsf{F}_3 \cdot \mathsf{F}_2 - \mathsf{F}_1 \cdot \mathsf{F}_4| = |2 \cdot 1 - 1 \cdot 3| = 1.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbf{N}$, tj. $|\mathsf{F}_{n+2} \cdot \mathsf{F}_{n+1} - \mathsf{F}_n \cdot \mathsf{F}_{n+3}| = 1$.

Provjerimo da tvrdnja vrijedi za $n + 1 \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} &|\mathsf{F}_{n+3} \cdot \mathsf{F}_{n+2} - \mathsf{F}_{n+1} \cdot \mathsf{F}_{n+4}| \\ =&|(\mathsf{F}_n + \mathsf{F}_{n+1})\mathsf{F}_{n+3} - \mathsf{F}_{n+1}(\mathsf{F}_{n+2} + \mathsf{F}_{n+3})| \\ =&|\mathsf{F}_n\mathsf{F}_{n+3} - \mathsf{F}_{n+1}\mathsf{F}_{n+2}| = 1 \end{aligned}$$

Stoga tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. ■

LITERATURA

1/ J. Amen (2006.): *Farey Sequences, Ford Circles and Pick's Theorem*, MAT Exam Expository Papers, Paper 2, `http://digitalcommons.unl.edu/mathmidexppap/2`

2/ A. Dujella, *Diofantske aproksimacije i primjene* (skripta), PMF – Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu.

3/ A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva* (skripta), PMF – Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu.

4/ J. Ainsworth, M. Dawson, J. Pianta, J. Warwick (2012.): *The Farey sequence*, Year 4 Project, School of mathematics, University of Edinburg, `http://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/fareyproject.pdf`

5/ `https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Haros`

6/ `http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/fareySB.html`