Jedna zanimljiva konstrukcija

Jens Carstensen i Alija Muminagić,
Frederiksberg, Danska

U srednjoj se školi danas sve rjeđe susreću zadatci ovog tipa:

1. *Zadan je raznostraničan trokut ABC. Konstruiraj jednakokračan trokut ABC_1 površine jednake površini trokuta ABC.*
2. *Konstruiraj kvadrat površine jednake površini zadanog pravokutnika.*

Mnogo je zadataka tog tipa (i lakih i teških), a u ovom članku riješit ćemo ovaj zadatak:

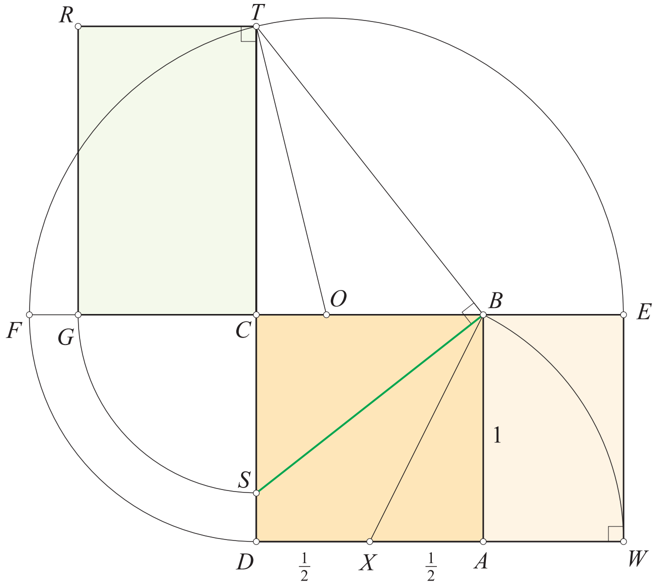
3. *Konstruiraj zlatni pravokutnik površine jednake površini zadanog kvadrata.*

Konstrukcija: Prisjetimo se:

- $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ je zlatni broj
- pravokutnik kod kojega je omjer duljina duže i kraće stranice jednak ϕ $\left(\dfrac{a}{b} = \phi\right)$ zove se zlatni pravokutnik.

Možemo uzeti da je površina zadanog kvadrata jednaka 1, tj. $|AD| = |AB| = 1$. Neka je X polovište dužine $\overline{AD}$. Kružni luk sa središtem u točki X i polumjerom $|XB|$ presijeca produžetak stranice kvadrata $\overline{DA}$, preko točke A, u točki W (slika 1). Tako je $|XB| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} = |XW|$, pa je $|DW| = |DX| + |XW| = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \phi$ (ovo je poznata konstrukcija zlatnog pravokutnika). Neka je E sjecište okomice u točki W i produžetka stranice kvadrata $\overline{CB}$, preko točke B, a F sjecište kružnog luka sa središtem u točki C i polumjerom $|CD|$, s produžetkom stranice kvadrata $\overline{BC}$ preko točke C. Označimo sa O središte polukružnice nad promjerom $\overline{EF}$ ($|OF| = |OE|$). Označimo sa T točku presjeka te polukružnice i produžetka stranice kvadrata $\overline{DC}$ preko točke C. Nacrtajmo dužinu $\overline{TB}$ i u točki B konstruirajmo njezinu okomicu koja stranicu kvadrata $\overline{CD}$ presijeca u točki S. Neka je G sjecište kružnog luka sa središtem u točki C i polumjerom $|CS|$ i dužine $\overline{CF}$. Konstruirajmo okomice u

Jens Carstensen i Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska



Slika 1.

točkama G i T i njihovu presječnu točku označimo sa R.

Dokazat ćemo da je $\dfrac{|CT|}{|CG|} = \phi$, tj. da je pravokutnik $CTRG$ zlatni.

Dokaz. Vrijedi (vidi sliku 1):

$$\begin{aligned}|OT| = |OE| &= \frac{1}{2}|EF| = \frac{1}{2}(|CE| + |CF|)\\ &= \frac{1}{2}(|DW| + |CD|)\\ &= (\text{zbog } |DW| = \phi \text{ i } |CD| = 1)\\ &= \frac{1}{2}(\phi + 1),\end{aligned}$$

i dalje

$$\begin{aligned}|OC| &= |CE| - |OE| = |CE| - |OT|\\ &= |DW| - |OT| = \phi - |OT|.\end{aligned}$$

Primjenom Pitagorina poučka u pravokutnom trokutu OCT dobivamo:

$$\begin{aligned}|CT|^2 &= |OT|^2 - |OC|^2 = |OT|^2 - (\phi - |OT|)^2\\ &= (|OT| + \phi - |OT|)(|OT| - \phi + |OT|)\\ &= \phi(2 \cdot |OT| - \phi)\\ &= \phi\left(2 \cdot \frac{1}{2}(\phi + 1) - \phi\right) = \phi,\end{aligned}$$

tj. $|CT| = \sqrt{\phi}$, a u pravokutnom trokutu BCT je $|BT|^2 = |CB|^2 + |CT|^2 = 1 + \phi$. Osim toga u tom trokutu je $\cos\sphericalangle BTC = \dfrac{|CT|}{|BT|}$.

Dalje, u pravokutnom trokutu TBS je

$$\begin{aligned}\cos\sphericalangle BTS = \cos\sphericalangle BTC &= \frac{|BT|}{|TS|}\\ \iff |TS| = \frac{|BT|}{\cos\sphericalangle BTC} &= \frac{|BT|}{\frac{|CT|}{|BT|}}\\ &= \frac{|BT|^2}{|CT|} = \frac{1+\phi}{\sqrt{\phi}}.\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}|CG| &= |CS| = |TS| - |CT|\\ &= \frac{1+\phi}{\sqrt{\phi}} - \sqrt{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\phi}}\end{aligned}$$

i konačno

$$\frac{|CT|}{|CG|} = \frac{\sqrt{\phi}}{\frac{1}{\sqrt{\phi}}} = \phi.$$

■

LITERATURA

1/ L. O. Barton: *Construction of a Golden Rectangle a Given Area*, Mathematical Spectrum, Vol. 39, No. 3.