Konveksni politopi

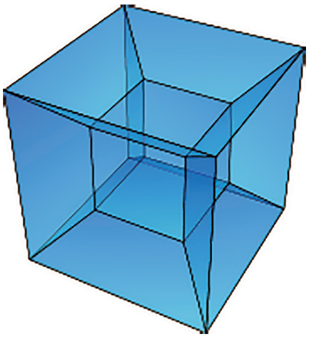
Sanja Sruk, Zagreb

Izlet u više dimenzije

Već u nižim razredima osnovne škole učenici se susreću s politopima. Doduše, samo s 2-politopima (mnogokutima) i 3-politopima (poliedrima). Živimo u trodimenzionalnom svijetu, pa nemamo problema s vizualizacijom dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih objekata, ali pođemo li malo dalje, onda to nije nimalo lako. Napravimo izlet u više dimenzije, otvorimo vrata novim svjetovima!

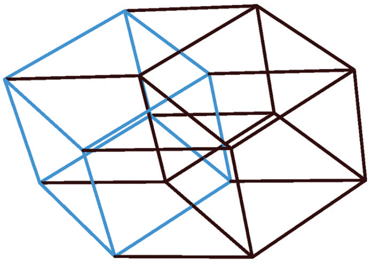
Što su konveksni politopi?

Konveksni politopi su višedimenzionalni analogoni poligona (mnogokuta) i poliedara u euklidskom dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom prostoru. Za razliku od poligona i poliedara koji su bili poznati još u antičko doba, politopi su otkriveni tek sredinom devetnaestog stoljeća. Isprva su se uglavnom proučavala njihova metrička svojstva, da bi kasnije pažnja bila usredotočena na kombinatornu prirodu problema. Početna točka u kombinatornom pristupu politopima bio je Eulerov poučak o vezi između broja vrhova, bridova i strana poliedra, a njegovo djelo su nastavili mnogi značajni matematičari poput Cayleya, Cauchyja, Steinera, Möbiusa, Eberharda i mnogih drugih.



Slika 1. Hiperkocka ili 4-kocka

Sanja Sruk, prof., 1. gimnazija, Zagreb, `sanja.sruk1@gmail.com`



Slika 2. Politop

Konveksnost i konveksna ljuska

Ako sa E^d označimo d-dimenzonalni euklidski prostor, onda je neki skup $K \subseteq E^d$ konveksan ako i samo ako za svake dvije točke x_0 i $x_1 \in K$ i $0 \leq \lambda \leq 1$ točka $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ pripada skupu K, što geometrijski znači da je K konveksan skup ako i samo ako sadrži čitavu dužinu kojoj su krajnje točke neke dvije točke iz K.

Za bilo koji skup $X \subseteq E^d$ presjek svih konveksnih skupova koji ga sadrže naziva se konveksna ljuska od X i to je očito najmanji konveksan skup koji sadrži X.

Konačno, **konveksni politop** je konveksna ljuska konačnog skupa točaka. On je omeđen poliedarski skup jer je presjek konačnog broja poluprostora.

Simpleksi

Najjednostavniji primjer d-politopa je d-simpleks S^d, definiran kao konveksna ljuska $d+1$ linearno nezavisnih točaka. Npr. 2-simpleks je trokut, a 3-simpleks tetraedar. Kad govorimo o stranama politopa P, njihova dimenzija može biti bilo koji broj k od 0 do $d-1$. 0-strane se nazivaju vrhovi, 1-strane bridovi, a ostale strane k-strane. Broj strana svakog politopa je konačan i svaka od njih je konveksni politop, a cijeli politop P je konveksna ljuska svojih vrhova.

Svaka strana d-simpleksa je i sama simpleks dimenzije manje od d. Svakih $k+1$ od ukupno $d+1$ vrhova d-simpleksa su vrhovi neke k-strane, pa je ukupan broj k-strana simpleksa

$$f_k(S^d) = \binom{d+1}{k+1}.$$

Slovo f se koristi prema njemačkoj riječi za stranu (njem. *Flanke*), a prvi ga je koristio Euler.

Simpleks možemo definirati i kao konveksnu ljusku $(d-1)$-simpleksa i točke x koja ne pripada potprostoru određenom tim simpleksom. Na sličan način možemo definirati d-piramidu kao konveksnu ljusku $(d-1)$-politopa i točke x koja ne pripada potprostoru određenom tim politopom, a postoje i d-prizme, d-bipiramide, itd.

Eulerov teorem

Eulerov teorem bio je prvi poznati kombinatorni teorem o politopima i do danas je ostao jedan od najvažnijih i najprimjenjivanijih. On glasi:

Neka je P d-politop, a $f_k(P)$ broj njegovih k-strana $(0 \leq k \leq d-1)$. Tada vrijedi:

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k f_k(P) = 1 + (-1)^{d-1}.$$

U trodimenzionalnom slučaju, tj. do rezultata $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ došao je Euler 1752. godine. Zanimljivo je da je taj teorem bio poznat još i Descartesu stotinu godina ranije, no njegovi su rukopisi bili izgubljeni i zaboravljeni, a neke kopije su pronađene tek 1860. godine među Leibnitzovim rukopisima. Pojavom višedimenzionalne geometrije sredinom 19. stoljeća Schläfli je 1852. godine otkrio Eulerovu relaciju za politope dimenzije veće od 3, no njegov dokaz je u potpunosti objavljen tek 1902. Do istog su rezultata koncem 19. stoljeća istovremeno došli mnogi geometričari, no u svojim su dokazima polazili od nekih nedokazanih pretpostavki. Čini se da je prvi pravi dokaz dao Poincaré 1899. godine, a zatim, na različite načine, i mnogi drugi.

U tri dimenzije

Pogledajmo, ilustracije radi, kako je Euler došao do rezultata $f_0 - f_1 + f_2 = 2$, odnosno $V - B + S = 2$ kako je nama poznato (kod Eulera su oznake bile E-*Ecke*, K-*Kante* i F-*Flanke*).

poliedar	S	$\sum \alpha$	V	$2\pi V$
kocka	6	12π	8	16π
tetraedar	4	4π	4	8π
oktaedar	8	8π	6	12π
peterostrana prizma	7	16π	10	20π
toranj	9	14π	9	18π

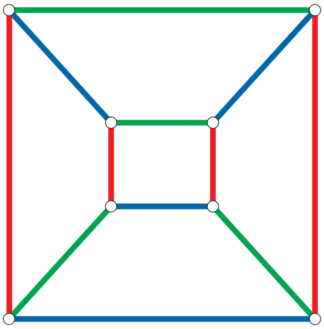
Promatrajući razne poliedre (vidi gornju tablicu), Euler je došao do sljedeće pretpostavke:

$$\sum \alpha = 2\pi V - 4\pi = 2\pi(V-2)$$

pri čemu je $\sum \alpha$ zbroj svih plošnih kutova poliedra. Označimo li sa $1, 2, \ldots, S$ strane poliedra, a sa $b_1, b_2, \ldots, b_S$ broj bridova strana, vidimo da je $\sum_{i=1}^{S} b_i = 2B$ (jer je svaki brid računan dva puta), pa imamo

$$\begin{aligned}\sum \alpha &= \pi(b_1-2) + \pi(b_2-2) + \ldots + \pi(b_S-2)\\ &= \pi \cdot 2B - 2\pi S = 2\pi(B-S).\end{aligned}$$

Izjednačimo li to s gornjom hipotezom, dobije se $V - 2 = B - S$, tj. $V - B + S = 2$. Istinitost hipoteze pokazuje se s pomoću topoloških transformacija (na slici je transformirana kocka). Ako sa r označimo broj bridova osnovnog poligona, tada je zbroj kutova na osnovici $(r-2)\pi$, a u unutrašnjosti ostaje $V - r$ vrhova i uz svakog od njih imamo kut



Slika 3. Topološki transformirana kocka

2π. Kako zbog trodimenzionalnosti kutove osnovice moramo računati dva puta, imamo:

$$\sum \alpha = 2(r-2)\pi + 2\pi(V-r) = 2\pi(V-2),$$

čime je potvrđena hipoteza.

Pravilni poliedri

Posljedica Eulerove poliedarske formule je postojanje točno pet pravilnih poliedara. Naime, označimo li sa m broj bridova na svakoj strani, a sa n broj bridova koji se sastaju u svakom vrhu, vidimo da vrijedi:

$$m \cdot S = 2B \implies S = \frac{2B}{m}$$

i

$$n \cdot V = 2B \implies V = \frac{2B}{n}.$$

Uvrsti li se to u formulu $V - B + S = 2$, dobije se

$$\frac{2B}{n} - B + \frac{2B}{m} = 2,$$

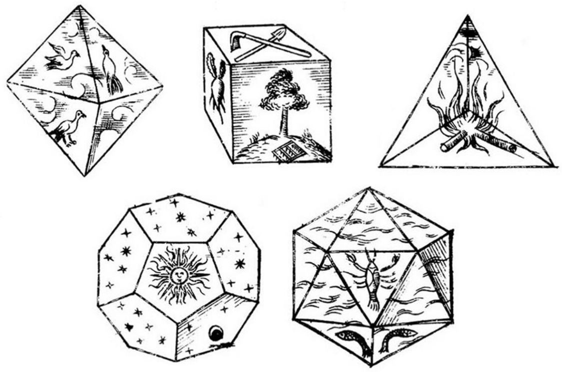
tj.

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{B}.$$

No, B je prirodan broj pa je $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$, što znači da m i n ne mogu istodobno biti veći ili jednaki 4, a moraju biti barem 3 (jer je svaka strana trokut i u svakom se vrhu sastaju bar tri brida). Razmotrimo li sve mogućnosti, dobijemo sljedeći rezultat:

1) $m = 3, n = 3$ – tetraedar
2) $m = 3, n = 4$ – oktaedar
3) $m = 4, n = 3$ – kocka
4) $m = 3, n = 5$ – ikosaedar
5) $m = 5, n = 3$ – dodekaedar.

Platon je svijet gledao kao kombinaciju četiriju elemenata: vatre, vode, zemlje i zraka. Prema njegovom tumačenju vatra je tetraedar, jer je oštar; kocka je zemlja, jer je najstabilniji poliedar; oktaedar je zrak zbog svoje prozračnosti, a voda ikosaedar jer je "najobliji" poliedar. Dodekaedar za Platona predstavlja svemir.



Slika 5. Četiri elementa i svemir

I još samo ovo

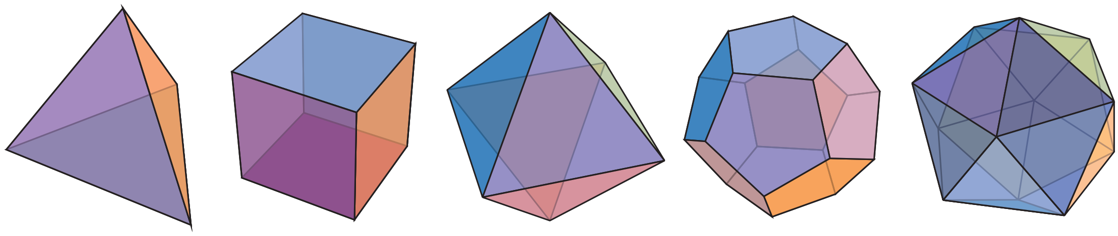
Ime politopima dao je matematičar Reinhold Hoppe (1816.–1900.), a primjenu nalaze u raznim granama matematike i srodnih znanosti, osobito u linearnom programiranju.

LITERATURA

1/ B. Grünbaum (1967.): *Convex Polytopes*, John Wiley and Sons, London-New York-Sidney.

2/ P. McMullen, G. C. Shepard (1971.): *Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture*, London Mathematical Society, Cambridge.

3/ Convex Polytopes, `https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_polytope`



Slika 4. Pravilni poliedri (Platonova tijela)