

Tablica množenja na krugu

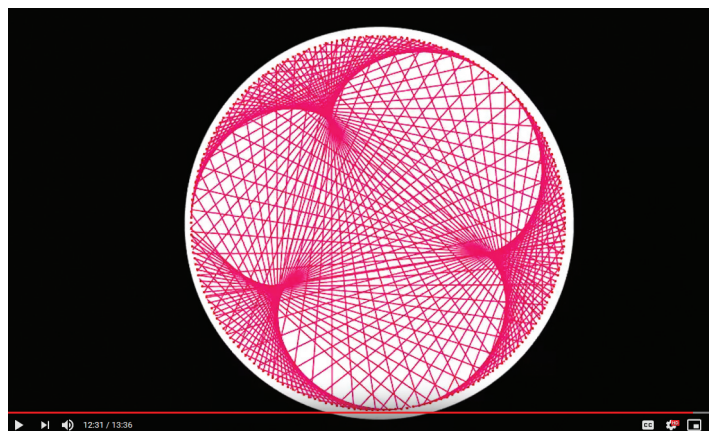
– jednostavna ideja, bogati oblici

Šime Šuljić, Pazin

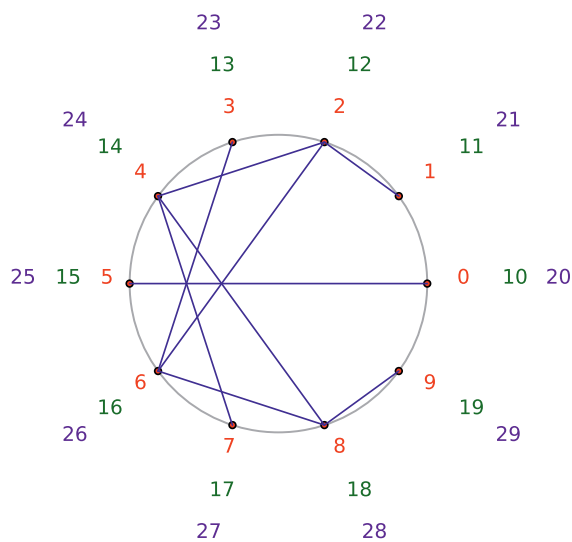
Prije čitanja ovog članka (još jednom) pogledajte sličice u panoptikumu ovog broja Miš-a. Njemački matematičar Burkard Polster se na svom YouTube kanalu *Mathologer* pita: “Zar je moguće da ih sve povezuje jedno jedino načelo?” (<https://youtu.be/qhbuKbxJsk8>). Odgovor je potvrđan i vrlo jednostavan, povezuje ih obična *tablica množenja*!

Zamislamo da redom nulu i prirodne brojeve poređane na brojevnom pravcu, množimo množiteljem 2 i pritom ih spajamo lukovima s umnoškom. Spojili bismo tako 0 sa samom sobom, 1 sa 2, 2 sa 4, 3 sa 6, 4 sa 8, 5 sa 10... Iznad točaka brojevnog pravca imali bismo sve veće i veće lukove. Ali što ako brojeve posložimo na kružnicu na kojoj je pravilno raspoređeno n točaka kojima su redom pridruženi brojevi od 0 do $n - 1$, a broj n je pridružen točki s nulom, $n + 1$ točki s jedinicom i tako redom? Pri spajanju množenika s umnoškom crtati ćemo uvijek samo dužine.

Uzmimo za primjer da na kružnici imamo deset točaka i njima su redom pridruženi brojevi 0, 1, 2, 3... Broj 10 pridružen je ponovno točki 0, broj 11 točki 1... Odnosno, trećoj točki će biti pridruženi brojevi 2, 12, 22, 32 i tako redom. Na slici 1 dan je prikaz “namatanja” brojeva na kružnicu i spojnice množenika s umnoškom ako je množitelj 2. S množiteljem 3 dobije se drukčija figura koju daju spojnice. Nju lako možemo nacrtati olovkom ili čak zamisliti, jer radi se o malom broju točaka. Čarolija oblika koju stvaraju spojnice nastaje pri po-

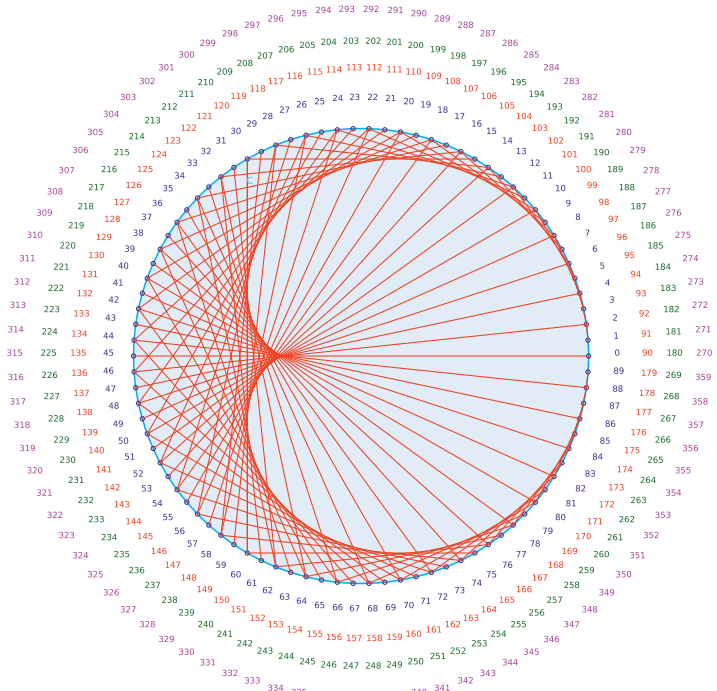


većanju broja vrhova, odnosno točaka na kružnici. Na slici 2 vidimo 90 vrhova s množiteljem 2. Sada shvaćamo da je na slici 1 već dana naznaka



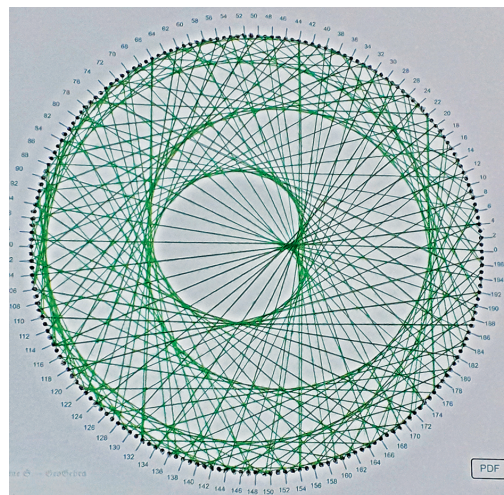
Slika 1.

tog oblika. Idemo li dalje u povećanje vrhova, odnosno u zgušnjavanje spojnica, dobit ćemo gotovo glatku krivulju znanu pod nazivom kardioida. U svom videouratku profesor Polster govori da kardioidu dobijemo kao odsjaj paralelnog snopa zraka svjetlosti na površini tekućine u šalici kave. Kardioidu dobivamo kao trag jedne točke kružnice koja se kotrlja po fiksnoj kružnici jednakog polumjera. I glavno tijelo Mandelbrotova skupa je kardioida! Preporučam da svakako pogledate njegov video.



Slika 2.

Prepuštimo se daljnjem istraživanju oblika koji čine spojnice množenika i umnoška kada mijenjamo vrijednost množitelja. Slike koje vidite u panoptikumu časopisa koji držite u rukama su zapravo slike s istim brojem vrhova, ali različitim množiteljima. Budući da je načelo po kojem nastaju ovi oblici vrlo jednostavno, ovo je idealna prigodna aktivnost za Večer matematike. Mogu je raditi i učenici nižih razreda osnovne škole, bilo crtajući olovkom, šestarom i ravnalom ili provlačeći konac na kartonu s rupicama ukруг. Potrebno je samo pažljivo množiti i odbrojavati. Na slici 3 vidimo jedan ručni



Slika 3.

rad, konac na kartonu, koji je izradila Ljiljana Koritnik, učiteljica matematike iz Zadra.

Ručni rad zahtijeva pažnju, strpljenje i urednost. Da bismo ga ipak malo olakšali, napravio sam predloške za ispis s pomoću računala na pisaču. U trendu su digitalni dodatci udžbenicima i drugim obrazovnim sadržajima, a mi smo u ovom časopisu odavno započeli s tom praksom. Tako i ovaj članak ima svoj mrežni dodatak na URL adresi:

<https://www.geogebra.org/m/tjhcjfae>.

Tamo ćete naći gotove predloške za ispis ili predloške koje sami kroz interaktivne stranice možete izraditi s proizvoljnim brojem vrhova, ali i detaljne tehničke upute za ručni rad kolegice Ljiljane Koritnik.

Više od toga, ta kolekcija od skoro dvadesetak stranica zapravo je interaktivna digitalna priča o ovom fenomenu. Fenomen koji vaši učenici satima mogu istraživati u potrazi za fantastičnim oblicima mijenjajući broj vrhova n i prolazeći kroz različite množitelje m . I na kraju, izazovite ih da, počevši od nule, sami izrade čaroliju na zaslonu računala. I to bez nekog programiranja! Sve ove impresivne slike nastale su u osnovi s pomoću dvije GeoGebra naredbe: niz točaka i niz dužina. Samo malo matematike u tim naredbama i eto čarolije. Postupak je opisan u digitalnom dodatku. Ugodna zabava!