

Jasniji zahvaljujući matematici

Kako učenici primjenjuju matematičko izražavanje

Ivanka Matešić, Vrbovsko

Jasnoći i jednoznačnosti u izražavanju teži svaka struka. Tijekom obrazovanja učenike se u okviru svakoga predmetnog područja nastoji osposobiti kako bi različite pojmove i fenomene opisali na objektivan, tj. znanstveni način. Tome cilju bitno pridonosi nastava matematike. Pokažemo li im strukturu i pravila matematičkoga opisa, učenici će uvidjeti vrijednost matematičkoga izražavanja i mišljenja te će ga primjenjivati i u drugim područjima.



1. Općenito o stručnome i znanstvenom izražavanju

Stručno i znanstveno izražavanje unutar standardnoga jezika pripada njegovu *znanstvenome funkcionalnom stilu*. Znanstveni funkcionalni stil standardnoga jezika služi za prijenos znanstvenih informacija i znanstvenoga mišljenja. Njime se služe stručnjaci i znanstvenici u svim strukama i područjima znanosti: njime su pisani stručni radovi, znanstveni radovi, disertacije, diplomski radovi, priručnici i udžbenici. Lingvistika uobičajeno opisuje taj stil kao objektivan, jasan, koncizan, jednoznačan, svrhovit i neutralan.¹ Upravo te značajke

čine ga poželjnim načinom izražavanja i izvan uskoga kruga znanstvenika i stručnjaka. Često nam je u svakodnevnom životu potrebno jasno i jednoznačno izraziti svoja razmišljanja, opisati svoje ideje, predstaviti drugima svoj projekt i sl.

Za jasnu i svrhovitu komunikaciju među stručnjacima nužna je stručna terminologija (stručno nazivlje) jer ona omogućuje precizno izražavanje u struci. Osim korektne upotrebe terminologije, nužno je opisati stručne pojmove na primjeren način. Za opisivanje termina služimo se pravilima logičkoga određivanja, poznatijima pod nazivom "struktura definicije". Pritom mislimo na definiranje, određivanje u najširem smislu, a ne samo na uzak pojam matematičke definicije. Pra-

Ivanka Matešić, prof. mat., Gimnazija Bernardina Frankopana, Ogulin, ivanka.matesic@skole.hr

¹ Sve što je ovdje rečeno o znanstvenome funkcionalnom stilu izdvojeno je prema knjizi Josipa Silića *Funkcionalni stilovi hrvatskoga jezika*, Disput, Zagreb, 2006., str. 43–64.

Izvor naslovne fotografije: <https://www.hoopla.net/how-to-communicate-effectively-in-the-digital-age/>

vilno strukturiranje opisa i definicije pojma važno je u svim strukama. Opisivanje i definiranje pojmova donosi praktičnu korist u svakoj struci jer ono odražava konsenzus unutar struke o tome što znači ili koji opseg pokriva pojedini pojam. Primjerice pojam operacije u medicini, vojnoj struci i matematici potpuno je različit i stručnjaci ga unutar svake od tih struka razumiju jednoznačno, iako se u tim trima primjerima različita značenja imenuju istom riječi. Ovo susrećemo ne samo u hrvatskom, nego i u nizu drugih svjetskih jezika. Međutim, uz takvu praktičnu svrhu, opisivanje pojma, tj. njegovo određivanje/definiranje ima ulogu i u svladavanju kognitivnoga procesa koji pripada generičkim kompetencijama. Takav proces obuhvaća sposobnost razdvajanja bitnoga od nebitnoga (što je kontekstualno uvjetovano pri opisivanju, a apsolutno uvjetovano pri definiranju), zatim sposobnost induktivnoga i deduktivnog zaključivanja, uočavanja i izvođenja pravila i zakonitosti te izražavanja na materinskome jeziku. Znanstveno opisivanje i znanstveno određivanje/definiranje imaju svoju utvrđenu formu i pravila, a svaka struka, zastupljena kroz predmete u školskome kurikulumu, usmjerena je upravo ka privikavanju učenika na takav način izražavanja.

2. Matematičko opisivanje i definiranje

Opisivanje i definiranje bitni su procesi u matematičkome mišljenju. Prvi se proces odnosi na fenomene iz stvarnosti koje je potrebno prenijeti sugovorniku u komunikaciji kako bi se i govornik i sugovornik usredotočili na isto, a definiranje se odnosi na uvođenje novih pojmova koje će prihvatiti i govornik i sugovornik u daljnjoj komunikaciji. Jedan i drugi proces podrazumijevaju odvijanje istoga kognitivnog procesa koji je u glavnim crtama opisan u prethodnome poglavlju, a koji je karakterističan za matematičko mišljenje. K tome se oba procesa odvijaju uz poštovanje pravila iz logike koja se

odnose na oblikovanje definicije u najširem smislu toga pojma. Definicija se, kao što je poznato, sastoji od pojma koji se definira (lat. *definiendum*) i pojma kojim definiramo (lat. *definiens*). Pritom je potrebno svakom *definiensu* pronaći najbliži rod (lat. *genus proximum*) i vrsnu razliku (lat. *differentia specifica*). Prema općenitim pravilima, korektno izvedena definicija treba biti:

- 1) primjerena opsegom (ni preširoka ni preuska) i k tome obratljiva
- 2) jasna (bez dvosmislenih ili neodređenih i nejasnih pojmova)
- 3) ne smije biti ciklička (pojam se ne smije definirati njime samim)
- 4) pregledna i sažeta (sadrži samo bitna obilježja pojma)
- 5) ne smije biti negativna ako može biti pozitivna (tzv. niječne ili lišidbene definicije mogu se davati eventualno ako je pojam koji se definira i sam niječan ili lišidben).²

Pored spomenutih općih pravila, koja vrijede u izvođenju definicija u bilo kojem području, moguće je izdvojiti i definicijske postupke u matematičkome mišljenju. Navest ćemo nekoliko najčešće primjenjivanih takvih postupaka. Osnovni načini definiranja u matematici su: definiranje navođenjem najbližeg roda i razlike vrste, definiranje nabranjem bitnih obilježja pojma, induktivna definicija, genetička definicija i konvencionalna definicija.

Definiranje navođenjem najbližeg roda odnosi se na uvođenje pojma s pomoću najbližeg roda i jednog bitnog obilježja koje pripada vrsti koja se definira. Npr. najbliži rod kvadratu mogu biti i pravokutnik i romb, a vrsna razlika u prvome je slučaju "susjedne stranice jednakih su duljina" ili "dijagonale su okomite", dok u drugome ona glasi "jedan unutarnji kut je pravi".

Definiranje se često vrši i nabranjem bitnih obilježja pojma koja se lako uočavaju. Npr. *Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke prostora.*

² Određenje definicije i pravila njezina izvođenja dana su prema ovim izvorima: Mirko Jakić, *Logika*, Školska knjiga, Zagreb, 1998., str. 167–169, Srećko Kovač, *Logika*, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb 2005., str. 135–137, Zdravko Kumik: *Oblici matematičkog mišljenja*, Element, Zagreb, 2013., str. 18–20.

Induktivna definicija podrazumijeva misaoni slijed koji se oslanja na izvođenje simboličkoga zapisa, npr. *Niz kojemu je svaki član jednak umnošku prethodnog člana i konstante naziva se geometrijski niz* ($a_n = a_{n-1}q$).

S pomoću opisa postanka objekta oblikuje se genetička definicija (ona nije znanstvena definicija, ali ima didaktičku vrijednost na nižim razinama obrazovanja), npr. *Tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice naziva se valjak*.

Dogovorom uspostavljeno značenje određenoga pojma ili simbola podloga je za izvođenje konvencionalne definicije, npr.: $0! = 1$.³

Matematičko opisivanje i matematičko definiranje imaju dodirnih točaka (usporedimo npr. genetičku definiciju). Sve što je rečeno o strukturiranju definicije može se reći i za matematičko opisivanje, koje mora udovoljiti istome načinu pretakanja matematičkoga opisa u matematičku terminologiju i izražavanju znanstvenim stilom primijenjenim u polju matematike.

Vodeći se stavom da je matematičko opisivanje i definiranje visoko vrijedno znanje, koje će učenicima pomoći u navikavanju na objektivno, jasno i jednoznačno izražavanje, što je kompetencija prenosiva i na druga polja izvan matematike, posvetili smo tome vježbu na nastavi matematike u srednjoj školi.

3. Ciljevi i metode provedene vježbe

Izražavanje stručnim i znanstvenim stilom u polju matematike ponajviše se prepoznaje kroz uporabu matematičke terminologije. Međutim, ono se ne svodi samo na termine, nego se, kao i u svakoj struci i znanosti, radi o specifičnome načinu objektivnog izražavanja koje se odlikuje discipliniranim izražavanjem, usmjerenim na postizanje jasnoće, jednoznačnosti i svrhovitosti. Nastavnici su

općenito navikli na takav način izražavanja i njime se dosljedno služe na satu. Ako nastavnici primijete da učenici ne mogu slijediti takav zgusnuti način izražavanja, često se nakratko odmiču od njega kako bi (primjerice uz uporabu više riječi ili s pomoću usporedbi koje bi retorika svrstala u analoške retoričke figure) učenicima objasnili o čemu je riječ. Karakteristično je da se nastavnici nakon što uoče da je cilj postignut odmah vraćaju matematičkome načinu izražavanja, i to na način da ono što su netom izrekli, ponove stilom koji odgovara uobičajenom matematičkom izražavanju. Mnogi učenici se matematičkim izražavanjem služe nevoljko, za njih je taj stil ograničavajuć i stran. Uspješnije svladavaju matematičku terminologiju nego pravila matematičkoga opisa i definiranja. Drugim riječima, učenici lakše prihvaćaju potrebu razlikovanja npr. termina *krug* i *kružnica* nego što su spremni prepoznati da i u matematičkome opisivanju i definiranju postoje vrijedni elementi koji također pridonose jednoznačnome izražavanju jednako kao što tome pridonosi i matematička terminologija.

Ovom smo vježbom učenike, umjesto “usputnom” svladavanju matematičkog izražavanja, izložili njegovoj svjesnoj primjeni, a u okviru toga i raspravi, tijekom koje smo kod učenika željeli osvijestiti vrijednost matematičkog metajezika.

U vježbi je odabrano oblikovanje induktivne definicije jer smo smatrali da ona učenike najučinkovitije usmjerava prema traženoj misaonoj reakciji. Nadalje, ona je omogućavala i davanje upute učeniku koja glasi “Opiši...”, “Izreci...”, “Iskaži...”, “Objasni...” umjesto “Definiraj...”. Izbjegavanje upute “Definiraj...” bilo je važno stoga što učenici postupak definiranja smatraju pridržanim nastavniku i nevoljko se odlučuju na sudjelovanje u izvođenju definicije. Skloni su definiciju doživljavati kao gotovu cjelinu koju prezentira nastavnik i koju učenici zatim samo preuzimaju, najčešće bez analize. Potpomognuto je to i svojevrsnim nesporazumom koji se odvija u okviru suvremenih zahtjeva za razumijevanjem umjesto puke reprodukcije znanja. Naime, u novije se doba u praksi nerijetko događa

³ Popis i oprimjerjena najčešće upotrebljivanih definicija u matematici dan je prema knjizi Zdravka Kumika *Oblici matematičkog mišljenja*, Element, Zagreb, 2013., str. 14–17.

da nastavnici naglašavaju učenicima kako moraju “znati definiciju”, a često traženje da se ona ponovi od riječi do riječi – što može imati svoje opravdanje u pravilima oblikovanja definicije – navodi učenika na pogrešan zaključak o “nedodirljivosti” definicije i na potrebu da se ona nauči napamet, bez razumijevanja. Nastavnik je pritom zadovoljan kad u odgovoru čuje pravilno ponovljenu definiciju, ali učenik najčešće nije osvijestio zašto definicija ima upravo takav oblik ili kako se do njega došlo.

Vježba je provedena u drugom, trećem i četvrtom razredu Gimnazije Bernardina Frankopana u Ogulinu, na uzorku od 105 učenika. Podatke u drugom razredu prikupila je Ivana Brozović, *mag. edu. math. et inf.* U okviru obrade nastavnoga sadržaja izveli smo odgovarajuću matematičku formulu, a učenici su zatim dobili zadatak da tu formulu (i/ili pojam) opišu riječima. Učenicima su podijeljeni listovi papira s uputom koja je, primjerice, u četvrtome razredu glasila: “Opiši riječima formulu $d = a_n - a_{n-1}$ i objasni pojam aritmetičkoga niza!” Analogno tome u drugome se razredu pitanje odnosilo na definicije trigonometrijskih funkcija šiljastoga kuta, u trećim razredima na nastavne jedinice kosinusov poučak i površina trokuta, a u četvrtim razredima uz navedeno pitanje i na definiciju geometrijskoga niza. Za upisivanje odgovora na papir učenici su imali 5 minuta.

Nakon toga učenici su naglas čitali svoje prijedloge, koje smo zajednički analizirali, komentirali i, prema potrebi, mijenjali. Izmjene su predlagali sami učenici iznoseći pritom argumente. Nastavnikovo vođenje odvijalo se kroz postavljanje pitanja i potpitanja o mogućim implikacijama koje ima trenutno predložen oblik objašnjenja. Nastavnikov pristup temeljio se na povezivanju znanja o matematici i znanja o teoriji definicije. Učenici su poticani na razmatranje je li trenutna formulacija njihova odgovora najbolja moguća ili ima razloga za njezinu doradu.

Dorade i konačno usuglašen oblik odgovora (definicije aritmetičkoga niza) učenici su zapisali u svoje bilježnice, a papir na koji su zapisali prvotni individualni prijedlog predan je nastavniku.

4. Analiza prikupljenih odgovora

Prikupljene učeničke odgovore analizirali smo prema godinama učenja matematike.

Primjeri prikupljeni od učenika u drugome razredu (tema: Trigonometrijske funkcije) – odgovori na zadatak “Opiši funkciju sinus.” (ovdje se dakako, željela dobiti definicija, ali je taj termin izbjegnuto zbog ranije opisanih razloga, v. poglavlje 3.):

- “Broj $\sin \alpha$ jednak je količniku nasuprotne katete a i hipotenuze.”
- “Broj $\sin \alpha$ jednak je omjeru stranice a i c pravokutnog trokuta.”
- “Broj $\sin \alpha$ je trigonometrijska funkcija koja se definira po položaju prema kutu. I to vrijedi isto i za $\cos \alpha$ i $\tg \alpha$.”

Primjeri prikupljeni od učenika u trećim razredima (teme: Kosinusov poučak i Površina trokuta

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma)^4$$

- Odgovori na zadatke “Izreci kosinusov poučak.” i “Iskaži riječima formulu za površinu trokuta.”
- “Kvadrat nad jednom stranicom kosokutog (sic!) trokuta jednak je razlici zbroja kvadrata drugih dviju stranica i dvostrukom umnošku tih dviju stranica i kosinusa kuta nasuprot traženoj stranici.”
- “Kvadrat nad stranicom jednak je zbroju kvadrata drugih dviju stranica trokuta i umanjen dvostrukim umnoškom kosinusa kuta i tih stranica.”
- “Kvadrat nad stranicom jednak je kvadratu nasuprotne stranice koju zbrajamo razlikom treće stranice na kvadrat i umnoškom treće stranice, druge i cosinusom (sic!) kutom tražene stranice.”
- “Površina je jednaka polovici umnoška dvije stranice i sinusa kuta između te dvije stranice.”
- “Površina trokuta je jednaka umnošku $\frac{1}{2}$, dvije stranice i kutom između te dvije stranice.”
- “Polovina umnoška dvaju (sic!) stranica i kuta treće stranice.”

⁴ Svi citati ostavljeni su u originalu pa u njima ima kako pravopisnih i gramatičkih, tako i stručnih pogrešaka.

Primjeri prikupljeni od učenika u četvrtim razredima (teme: Aritmetički niz i Geometrijski niz) – odgovori na zadatak “Opiši riječima formulu $d = a_n - a_{n-1}$ i objasni pojam aritmetičkoga niza.”:

- “Aritmetički niz je niz brojeva u kojemu je razlika člana i njegova prethodnika konstantna.”
- “Aritmetički niz je niz u kojem je razlika člana i člana ispred njega stalna.”
- “Aritmetički niz je slijed brojeva u kojem je svaki sljedeći broj uvećan za neki konstantni broj.”
- “Niz je geometrijski ako je kvocijent svakog člana i člana prije njega, osim prvog, jednak realan broj.”
- “Geometrijski niz je niz uzastopnih članova za koje vrijedi da svaki sljedeći član dijeljen s prethodnim članom daje jednak broj.”

Iz prikazanih primjera vidljivo je da su u približavanju najprihvatljivijoj definiciji najuspješniji učenici četvrtih razreda, a najmanje uspješni učenici drugoga razreda. Razlozi za to svakako leže u dužini matematičkoga obrazovanja i iskustvu s postupkom matematičkoga opisivanja i definiranja koje je, zasigurno, potpomognuto i znanjem iz predmeta *Logika*, koji se poučava u drugom polugodištu trećega razreda.

Poteškoće koje su vidljivo omele učenike u dosezanju traženih definicija mogu se razvrstati na one uzrokovane nepoznavanjem matematičke terminologije, nepoznavanjem metodologije izvođenja definicije i nepoznavanjem strukture definicije. Zamjetan je i izostanak samoprovjere te je prisutna nezainteresiranost i nekoncentriranost, što pokazuju učestale gramatičke pogreške u kongruenciji rečeničnih dijelova, brkanje termina, npr. razlike i zbroja, razlike i kvocijenta, kvocijenta i koeficijenta (!) i sl. Kad je riječ o strukturi definicije, učenici su najčešće zaboravljali navesti *definiendum*, nisu uspijevali navesti bitna obilježja u *definiensu*, davali su preširoku ili dvosmislenu definiciju.

5. Odras na uspjeh učenika

Nakon ove vježbe kod onoga dijela učenika koji je pokazao zainteresiranost za ovakav način rada bilo je pozitivnih promjena prilikom njihovih usmenih

odgovora. Učenici su znatno sigurnije i kompetentnije objašnjavali primjenu matematičke teorije te su se spremnije upuštali u objašnjavanje matematičkih pojmova vlastitim riječima i tumačenje definicija. Zamjetno su bili uspješniji u razlučivanju bitnoga od nebitnoga obilježja te uočavanju razlikovnog obilježja promatranoga objekta u odnosu na druge slične ili srodne objekte, što se može pripisati činjenici da se privikavanjem na definicijsko izražavanje učenici usmjeravaju upravo na takav kognitivni proces.

U jezičnome izražavanju pokazali su također bolje snalaženje na način da su u svojim usmenim odgovorima počeli primjenjivati samoispričavanje: vlastiti usmeni odgovor, čim su ga izrekli, pokušavali su “doraditi” s namjerom da njihov odgovor bude precizniji, sažetiji, jednoznačan/jednosmislen i jezično pravilan, a to su značajke na koje smo svraćali učenicima pozornost tijekom opisanih vježbi.

Sve u svemu, učenike na ovaj način možemo osvijestiti o povezanosti matematike i jezičnoga izražavanja jer matematika nudi vokabular koji pomaže jednoznačnom imenovanju predmeta, pojava, radnji i relacija, iz čega učenik shvaća da je matematički opis iskoristiv i prenosiv i na druga područja, izvan polja matematike. Također, kroz ovakve se vježbe učenici navikavaju na pravilno izvođenje procesa poopćavanja, procesa razlučivanja bitnoga od nebitnoga te procesa odlučivanja o tome koje je obilježje entiteta razlikovno. Učenici stječu i kompetencije pravilnoga izvješćivanja o tim procesima. Preciznost u izražavanju, jednoznačnost/jednosmislenost zadanoga zadatka ili opisa u matematici kvalitete su koje učenik prenosi pritom i u druge predmete te se na taj način u nastavi matematike usvajaju ne samo matematički sadržaji već se stječe i dio generičkih kompetencija.

LITERATURA

- 1/ M. Jakić (1998.): *Logika*, Školska knjiga, Zagreb.
- 2/ S. Kovač (2005.): *Logika*, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb.
- 3/ Z. Kurnik (2013.): *Oblici matematičkog mišljenja*, Element, Zagreb.
- 4/ J. Silić (2006.): *Funkcionalni stilovi hrvatskoga jezika*, Disput, Zagreb.