

# Vrijednosti poučavanja matematike, 2. dio

Philipp Legner, London, Ujedinjeno Kraljevstvo



U prošlom broju Miš-a mogli ste pročitati prvi dio članka mladog matematičara i programera **Philippa Legnera** o vrijednostima učenja matematike. U ovom članku slijedi nastavak: rasprava o vrijednosti matematike kao discipline i o njezinoj kulturološkoj vrijednosti.

## 2. Vrijednost matematike kao discipline

*Matematičar je, poput slikara ili pjesnika, tvorac uzoraka. To što su njegovi uzorci trajniji od njihovih, to je stoga što su načinjeni od ideja.*

G. H. Hardy

### Uvod

Prethodno se poglavlje<sup>1</sup> bavilo učenjem matematike zato da bi se rješavali matematički problemi, bilo da su oni postavljeni u apstraktnom kontekstu ili u stvarnom svijetu (uključujući školu, primjerice na nastavi geografije ili prirodoslovlja, te u inženjerstvu ili pri vođenju osobnih financija).

Ovo će se poglavlje baviti *matematičkim razmišljanjem i zaključivanjem* kao neovisnom vještinom koja se

može primijeniti na matematičke zadatke, ali i na širok spektar ostalih problema, školskih predmeta i raznih životnih situacija.

### Što je "matematičko razmišljanje"?

Tradicionalno poučavanje matematike, zajedničko Ujedinjenom Kraljevstvu i Sjedinjenim Američkim Državama, sastoji se većinom od pamćenja činjenica i formula, primjene određenih postupaka i algoritama te, u manjoj mjeri, razumijevanja nekih temeljnih koncepata [1, i mnogo sličnih izvora]. Međutim, rijetko se događa da učenici moraju *izvoditi* matematiku, primjerice, istražujući neki nepoznati problem.

U članku *A Mathematician's Lament*<sup>2</sup> [2], Paul Lockhart to uspoređuje s učenicima glazbe koji uče čitati i prepisivati note, a da nikad nisu čuli ili odsvirali ikakvu glazbu. Ili s umjetnicima koji uče o

Philipp Legner, magistar matematičkog obrazovanja, softverski inženjer u Googleu, London, UK, [philipp@legner.com](mailto:philipp@legner.com)  
Naslov originala: *The Value of Teaching Mathematics* by Philipp Legner, February 2013.  
Izvor: <https://mathigon.org/downloads/value-of-mathematics.pdf>

<sup>1</sup> Vidi Miš broj 97, prosinac 2018.

<sup>2</sup> Prijevod članka pod naslovom *Matematičareva jadikovka* objavljen je u Miš-u 47, 2008. i u Miš-u 48, 2009.

bojama, kistovima i bojenju po brojevima, a da nikad nisu sami naslikali nešto novo.

Vjerujem da bi trebalo biti barem jednako važno naučiti “matematički misliti”, kao što je važno naučiti aritmetiku i algebru. Međutim, prilično je teško definirati *matematičko razmišljanje*, što je sažeo Seymour Papert u članku *Teaching Children to be Mathematicians vs. Teaching about Mathematics* [3]:

*Kad netko postaje matematičar, uči li nešto drugo i općenitije od zadanog sadržaja pojedinih matematičkih tema? Postoji li uopće nešto poput matematičkog načina razmišljanja? Može li se to naučiti i poučavati? I kad se to jednom usvoji, postaje li onda učenje pojedinih tema (poput onih kojima su opsjednuti elitisti i praktičari) sasvim jednostavno?*

Papert pod *elitistima* smatra matematičare koji vjeruju da “trivijalnost” kakve se poučavaju u školama kvare proučavanje “pravih matematičkih struktura”, dok *praktičari* misle da treba učiti samo aritmetičke vještine potrebne u stvarnome životu.

U nastavku Papert daje primjer takvog *matematičkog načina razmišljanja*, sadržanog u programskom jeziku LOGO. On opisuje kako će igranje s LOGO-om dovesti djecu do matematičkog razumijevanja pa će im učenje tema poput algebre ili geometrije biti mnogo lakše.

Računalno programiranje samo je jedno sredstvo koje bi moglo voditi k takvom *matematičkom načinu razmišljanja*, a svi takvi pristupi moraju imati nekoliko zajedničkih svojstava:

- Djeca moraju imati mogućnost istraživanja, ispitivanja i igranja, s pristupom usmjerenim prema projektu (a ne prema problemu). To također uključuje *debugiranje*: pronalaženje propusta i pogrešaka u svojim postupcima.
- Korisno je imati fizički objekt o kojem treba razmišljati, kao na primjer model zrakoplova kojim upravlja računalni program. Također je potreban precizan jezik za razmišljanje i izražavanje ideja.
- Djeca bi se trebala jednostavno “zaljubiti” u ideje i te objekte.

Papert zaključuje primjedbom da “izbor sadržaja, pogotovo za mlađi uzrast, treba biti prvenstveno u funkciji prikladnosti za razvoj [tih neformalnih matematičkih osnova]”.

### Matematika razvija snagu mozga i trenira um

Matematika je poznata po tome što je teška. Dok u geografiji ili povijesti uvijek možete napisati esej o temama (čak i lošim) koje zapravo ne razumijete, matematika zahtijeva jasan uvid u temeljne koncepte ili potrebne sadržaje. Ne razumijete li pitanje, gotovo je nemoguće pokušati dati rješenje.

S druge strane, matematika nam pokazuje što je sve naš um sposoban učiniti. To što testovi inteligencije uvijek sadrže brojne matematičke i logičke slagalice nije slučajnost. Učenje matematike vježba naš mozak na potpuno drukčiji način od svih ostalih aktivnosti.

O odnosu matematike i mozga postoje brojna istraživanja, koja se protežu od područja obrazovanja do neuroznanosti. Posebno zanimljiv primjer prikazali su Blaira, Gambsonb, Thornec i Bakera 2004. godine. Oni u [4] navode kako je značajan porast prosjeka IQ-a u SAD-u tijekom prošlog stoljeća (za oko 20 bodova!) mogao biti uzrokovan ili barem povezan s većim “spoznajnim zahtjevima matematičkog kurikuluma za mlade učenike”. Nastavak istraživanja ove teme (u raznim područjima) dat će odličan uvid u snagu i korisnost matematike.

### Vrijednost logike i dokaza

Dokaz je skup logičkih argumenata koji stavljaju neku tvrdnju van svake sumnje. U čistoj matematici, dokaz je često jednako važan kao i sam poučak jer može sadržavati brojne detalje o tome *zašto* je ta tvrdnja istinita i kako se to odnosi na ostala polja matematike. Dokaz je samo jedan dio matematičkog misaonog procesa – i to obično njegov posljednji dio. Ali upravo je dokaz to što karakterizira matematiku i što je čini drukčijom od svih ostalih znanosti: dokaz nam dopušta da budemo apsolutno sigurni da je neki rezultat istinit [detaljnije u 5].

Kao što navodi Gila Hanna u [6], vrijednost dokaza u nekim poljima i primjenama matematike u novije vrijeme postaje sporna, posebice nakon prihvaćanja valjanosti dokaza dobivenih s pomoću računala (primjerice, dokaz poučka o četiri boje) ili razvojem "dokaza bez znanja" i "holografskih dokaza".

Sami dokazi ne moraju imati posebno veliku važnost u srednjoškolskom matematičkom obrazovanju – ali proces *razvijanja* dokaza zasigurno ima. Zahitijevati od učenika da dokažu neku tvrdnju znači natjerati ih da misle logično, da strogo ispitaju svaku izjavu i da obrazlože svoja objašnjenja. Prema Hanni [6], za matematičko poučavanje dokazi su velika prilika, ali predstavljaju i izazovan zadatak jer učenici trebaju naučiti pravila matematičkog argumentiranja:

*Predobro znamo da mnogi učenici imaju poteškoća u slijeđenju logičke rasprave bilo kakve vrste, a kamoli matematičkog dokaza. [...] Trebamo pronaći načine [...] i pomoći im da savladaju vještine i postignu potrebno razumijevanje. Ne uspijemo li u tome, odričemo se vrijednog alata za poučavanje, a učenicima uskraćujemo pristup osnovnom elementu matematike.*

### Precizan matematički jezik

Kad pišemo o matematici ili kad dokazujemo neki poučak, kao što je to predloženo u prethodnoj cjelini, važno je upotrijebiti jasan i precizan jezik i predstaviti ideje na logičan i dobro strukturiran način. Treba razmotriti sve različite mogućnosti i sve potrebne podatke ili varijable.

Prema osobnom iskustvu, mislim da je ta vještina vrlo korisna u mnogim drugim područjima života: od pisanja eseja i novinarstva do držanja govornih prezentacija. U svim tim slučajevima informacija treba biti predstavljena na jasan i pristupačan način, a to je najbolje ako se koristi logički i *matematički* pristup.

Naravno, tu su uključene i mnoge druge vještine, poput kreativnosti ili jezika, ali logična struktura

i jezgrovita objašnjenja zasigurno su vrlo dobar početak.

### Sažetak

U ovom se poglavlju raspravljalo o matematičkom razmišljanju kao vještini neovisno o praktičnim primjenama o kojima je bilo govora u prvom poglavlju<sup>3</sup>. Premda je teško *definirati* matematičko razmišljanje, bilo je lako naći medij za *poučavanje* logičkog i matematičkog razmišljanja: od računalnog programiranja u LOGO-u, do učenja dokaza. Međutim, kao što je gore navedeno, to donosi mnogo izazova.

Kroz poglavlje su navedene i neke *vrijednosti* matematičkog razmišljanja. To je primjerice jačanje snage mozga i povećanje IQ-a te razvijanje preciznijeg jezika za izražavanje svojih misli i ideja.

Vrlo popularne slagalice i mozgalice, poput sudokua ili Rubikove kocke, pokazuju da vježbanje matematičkog i logičkog zaključivanja ne mora uopće biti suhoparno i dosadno. Bilo bi izvrsno kad bi se slična uzbuđenja mogla uvesti u školsku matematiku.

## 3. Kulturološka vrijednost matematike

*Pravilno promatrana, matematika ne posjeduje samo istinu, nego i vrhunsku ljepotu – hladnu i asketsku, poput ljepote skulpture, neprivlačnu dijelovima naše slabije prirode, bez veličanstvene raskoši slikarstva ili glazbe, pa ipak krajnje čistu i sposobnu za nepokolebljivo savršenstvo kakvo samo najveća umjetnost može pokazati.*

Bertrand Russell, *Study of Mathematics*

### Pregled

Ovo je poglavlje o kulturološkoj vrijednosti poučavanja onih matematičkih tema koje za ogromnu većinu učenika ne moraju imati nikakvu praktičnu primjenu u životu. Važno je napomenuti da to

<sup>3</sup> U prošlom broju Miš-a

nije isto što i etnomatematika. Etnomatematika proučava kako kultura utječe na matematiku i matematičko poučavanje (vidi [7]), a ovo poglavlje govori o tome kako matematika podiže vrijednost našoj kulturi.

Napominjem da su zbog prirode ove teme mišljenja i primjeri u ovom poglavlju vrlo subjektivni i osobni. Pokušat ću istaknuti određeni broj različitih gledišta, ali ograničenja ovog rada ne dopuštaju mi detaljniju raspravu.

### Matematika kao jezik Svemira

Na početku ovog poglavlja želim citirati uvodni članak iz *Daily Telegrapha* (19. kolovoza 1998.) koji se pojavljuje u [1].

*Matematika je glavni ključ Svemira. Njezine tajne skrivene su laicima, ali bez nje bismo još uvijek živjeli u predznanstvenom, predindustrijskom svijetu. Ni najobrazovaniji ljudi nemaju dobar uvid u aritmetiku i geometriju starih Grka, a niti jedno od njihovih nasljeđa nema direktnijeg utjecaja na naše živote od ostavštine Euklida, Arhimeđa ili Diofanta. A što se modernih besmrtnika tiče, velika otkrića u fizici jednog Newtona ili Einsteina, bila bi nemoguća da nisu bili vrhunski matematičari. Naše je društvo sramotno loše osposobljeno za razumijevanje matematičkog uma.*

Demokracija i matematika dvije su velike ostavštine starih Grka. (Trebalo napomenuti da demokracija ne bi funkcionirala bez matematike: izračunati porez, odrediti raspodjelu sjedala u saboru na temelju direktnih i indirektnih glasova.) Bez matematike ne bi bilo nebodera, televizije, računala, komercijalnih zrakoplovnih letova, svemirskih letova niti vremenske prognoze. Bez matematike ne bismo bili ništa napredniji od starih Babilonaca. Kulturološka vrijednost i monetarno ekonomska (gospodarska) vrijednost matematike su nemjerljive.

I što je još važnije, zakoni prirode pisani su matematičkim jezikom: od jednadžbi opće relativnosti koje opisuju gibanjem planeta, zvijezda i galaksija u cijelom svemiru do elektrokemijskih signala u

našem mozgu. Što dublje ulazite u materiju, matematika u njezinim temeljima postaje sve vidljivija, dosežući svoj vrhunac u kvantnoj mehanici.

Jedan je od najplemenitijih ljudskih napora razumijevanje svemira u kojem živimo, a to ne bi bilo moguće bez matematike.

### Matematika kao jezik tehnologije

Posljednjih se 50 godina na dosad neviđen način iskazala sva moć matematike: kroz računala. Danas malo toga u životu radi bez računala, od skeniranja barkoda pri kupnji do kontrole liftova u neboderima.

Učimo li o prostim brojevima i RSA kodiranju, steći ćemo povjerenje u internetsku sigurnost, a učimo li o računalnom programiranju ili mrežnim protokolima, znat ćemo zašto se računalo srušilo i kako to možemo izbjeći.

Premda sve ove teme nemaju direktnu praktičnu primjenu u svakodnevnom životu, osobno sam izuzetno zadovoljan što mogu razumjeti nešto što je u mojem životu toliko važno.

### Ljepota matematike

Čisti matematičari poznati su po strastvenim pričama o "ljepoti" matematike, kao slike ili glazbenog djela. Zanimljivu raspravu o tome napisali su Hardy u članku *A Mathematician's Apology* [8], te Bramall i White u poglavlju 9 djela *Why Learn Maths?* [1].

Teško je osporiti njihove argumente: kao što možete voljeti ili ne voljeti klasičnu glazbu, možete cijeniti ili ne cijeniti ljepotu nekog dokaza ili poučka. Ali kao i bilo koji oblik umjetnosti, matematika zaslužuje da bude poštovana čak i od strane onih koji je ne cijene.

### Sažetak

Nema sumnje u to koliko je matematika važna u tehnologiji i znanosti. To međutim ne znači da poučavanje djece o tome ima neku vrijednost. Aspekt "ljepote" matematike time je još kontroverzniji.

Osobno smatram da ogromna važnost matematike u našem svijetu predstavlja dovoljan razlog da o tome učimo, čak i ako ne znamo *izvoditi* tu naprednu matematiku – kao što znamo za Mozarta i njegova djela, čak i ako ne znamo svirati njegovu glazbu.

Christer Kiselman u [9] spominje još jednu kulturološku vrijednost matematike: **međunarodnost**. Iako simboli i riječi mogu biti različiti, matematički koncepti isti su svugdje u svijetu – “pa čak i u vanzemaljskim civilizacijama u drugim galaksijama”. Čista matematika zaista briše granice i dopušta u velikoj mjeri međunarodnu suradnju.

## Sažetak i zaključak

Ovaj rad analizirao je vrijednosti poučavanja matematike iz nekoliko aspekata: iz aspekta praktične vrijednosti u svakodnevnom životu, iz aspekta vrijednosti matematičkog zaključivanja te iz aspekta kulturološke vrijednosti matematike. Naravno, nemoguće je kvantitativno izmjeriti te vrijednosti, a njihova relativna važnost u velikoj mjeri ovisi o osobnom mišljenju i iskustvu čitatelja.

Nema sumnje u to da je matematika kao predmet neprocjenjiva, međutim većina djece sumnja u vrijednosti školskog matematičkog kurikuluma.

Moj je zaključak da ne bismo smjeli poučavati *manje* matematike, već *drukčiju* matematiku, usredotočenu više na rješavanje problema i “matematičko razmišljanje” ili na matematičku intuiciju u realnim životnim situacijama, a manje na pamćenje formula i jednostavnu primjenu algoritama.

U ovom radu naveo sam i neke primjere mogućih rješenja da se matematički kurikulum učini uzbudljivijim, korisnijim i modernijim. Trenutačno postoje brojne vladine i nevladine inicijative za promjenu školske matematike. Pravo je vrijeme za rad u obrazovanju i za promatranje svega što će se dogoditi sljedeći niz godina.

### LITERATURA

- 1/ Steve Bramall and John White (ur.): *Why Learn Maths?*, Institute of Education, London, 2000.
- 2/ Paul Lockhart (2002.): *A Mathematician's Lament*, [www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf](http://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf)
- 3/ S. Papert (1971.): *Teaching Children to be Mathematicians vs. Teaching about Mathematics*, Artificial Intelligence Memo 249, MIT.
- 4/ C. Blair, D. Gamson, S. Thorne, D. Baker (2005.): *Rising Mean IQ: Cognitive Demand of Mathematics Education for Young Children, Population Exposure to Formal Schooling, and the Neurobiology of the Prefrontal Cortex*, Intelligence, V33 N1, Elsevier.
- 5/ G. Hanna, E. Barbeau (2002.): *What is proof?*, in “History of Modern Science and Mathematics”, Charles Scribner's Sons, New York.
- 6/ G. Hanna (1996.): *The Ongoing Value of Proof*, Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Valencia.
- 7/ U. d'Ambrosio (1985.): *Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics*, in “For the learning of Mathematics 5”.
- 8/ G. H. Hardy (1940.): *A Mathematician's Apology*.
- 9/ C. Kiselman: *The cultural significance of mathematics*, [www2.math.uu.se/~kiselman/cultureNZ.pdf](http://www2.math.uu.se/~kiselman/cultureNZ.pdf)

### Dodatna preporučena literatura

- 1/ Paul Ernest: *Why Teach Mathematics*, University of Exeter, [people.exeter.ac.uk/PErnest/why.htm](http://people.exeter.ac.uk/PErnest/why.htm).
- 2/ P. J. Davis and R. Hersh (1980.): *The Mathematical Experience*, Birkhauser, Boston.
- 3/ Morgens Niss, Alan Bishop (ur.) (1996.): *The International Handbook of Mathematics Education*, Chapter 1: Goals of Mathematics Teaching, Springer International Handbooks of Education.
- 4/ H. Bondi: *The Dangers of Rejecting Mathematics*, Times Higher Education Supplement, 26.3.76.

Prevela: Sandra Gračan

**2019** je najmanji broj koji se na 6 načina može prikazati kao zbroj kvadrata triju prostih brojeva:

$$7^2 + 11^2 + 43^2 = 2019$$

$$7^2 + 17^2 + 41^2 = 2019$$

$$13^2 + 13^2 + 41^2 = 2019$$

$$11^2 + 23^2 + 37^2 = 2019$$

$$17^2 + 19^2 + 37^2 = 2019$$

$$23^2 + 23^2 + 31^2 = 2019.$$