O dokazima

nekih algebarskih nejednakosti

Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

S pravom možemo reći da je dokazivanje nejednakosti izuzetno važan i kreativan posao u matematici. Tu veoma često dolaze do izražaja razne ideje da bismo danu nejednakost dokazali na jedan ili više načina. Naravno, oni učenici koji poznaju nešto više teorije (npr. nejednakosti između brojevnih sredina te neku od poznatih klasičnih nejednakosti poput nejednakosti Cauchy-Schwarz-Buniakowskog, Bernoullija, Jensena, Čebiševa i ostale) svakako će brže i lakše doći do dokaza dane nejednakosti. Upravo ćemo u ovom članku pokazati kako bi dvije algebarske nejednakosti dokazali učenici raznih nivoa znanja iz područja nejednakosti.

Najprije ćemo riješiti sljedeći zadatak:

Zadatak 1. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y;\quad (x,y>0). \qquad (1)$$

Dokaz 1. Transformacijom dane nejednakosti (1) dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y \quad /\cdot xy>0\\
\iff\ & x^3+y^3\geq xy(x+y)\\
\iff\ & (x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)\geq 0\\
\iff\ & (x+y)(x^2-xy+y^2-xy)\geq 0\\
\iff\ & (x+y)(x-y)^2\geq 0
\end{aligned}$$

a ova nejednakost je točna zbog $x+y>0$ i $(x-y)^2\geq 0$, pa je točna i dana nejednakost (1).

U (1) vrijedi jednakost samo u slučaju kada je $x{=}y$.

Sada ćemo dati dokaz jedne teže nejednakosti s trima varijablama.

Zadatak 2. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geq a+b+c;\quad (a,b,c>0). \quad (2)$$

Dokaz 1. Primijetimo odmah da primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja dobivamo

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{a}\cdot\frac{c^2}{b}},$$

tj.

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Ali ne vrijedi

$$3\sqrt[3]{abc}\geq a+b+c,$$

već vrijedi obrnuta nejednakost. Prijeđimo sada na dokaz nejednakosti (2). Imamo

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}&=\frac{a^2+c^2-c^2}{c}\\
&\quad+\frac{b^2+a^2-a^2}{a}+\frac{c^2+b^2-b^2}{b}\\
&=\frac{a^2+c^2}{c}+\frac{b^2+a^2}{a}+\frac{c^2+b^2}{b}-a-b-c\\
&\geq\frac{2ac}{c}+\frac{2ab}{a}+\frac{2bc}{b}-a-b-c\\
&=2a+2b+2c-a-b-c\\
&=a+b+c.
\end{aligned}$$

Ovdje smo koristili nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja, tj.

$$\frac{u^2+v^2}{2}\geq\sqrt{u^2v^2},\quad (u,v>0)$$
$$\iff u^2+v^2\geq 2uv.$$

prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, asefket@pmf.unsa.ba

U (2) vrijedi jednakost ako i samo ako je $a = b = c$.

Sada ćemo dokazati nejednakosti (1) i (2) koristeći sljedeće nejednakosti:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}; \quad (x, y > 0 \text{ i } a, b \in \mathbf{R}) \tag{3}$$

te

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}; \tag{4}$$
$$(x, y, z > 0 \text{ i } a, b, c \in \mathbf{R}).$$

Dokažimo najprije (3). Imamo

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \\
\iff &(a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \\
\iff &a^2xy + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2xy \\
&\geq a^2xy + 2abxy + b^2xy \\
\iff &a^2y + b^2x^2 \geq 2abxy \\
\iff &(ay - bx)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

što je točno. Dakle, nejednakost (3) je točna. U (3) vrijedi jednakost kada je:

$$ay - bx = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

Dokažimo sada i nejednakost (4). Koristeći dokazanu nejednakost (3) dva puta, imamo:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

■

U (4) vrijedi jednakost ako i samo ako je $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{z}{c}$.

Napomena Recimo još i to da vrijedi generalizirana (poopćena) nejednakost nejednakosti (3) i (4) koja glasi:

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}, \tag{5}$$

gdje su $x_i > 0$, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ova se nejednakost lagano dokaže koristeći princip matematičke indukcije.

Sada ćemo dokazati nejednakosti (1) i (2) koristeći nejednakosti (3) i (4).

Dokaz 2. nejednakosti (1). Imamo zbog (3):

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq \frac{(x+y)^2}{x+y},$$

tj.

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y.$$

Kratko i jednostavno.

Dokaz 2. nejednakosti (2). Sada dobivamo zbog (4):

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c},$$

tj.

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a + b + c.$$

Vrijedi isti komentar kao i gore. Ovdje vidimo koju prednost kod dokazivanja nejednakosti imaju oni učenici koji poznaju klasične nejednakosti, tj. potrebnu teoriju i znaju je učinkovito primijeniti. Naravno, sada bismo mogli sami sastavljati i slične zadatke iz nejednakosti s četirima (i više) nepoznanicama za čiji bismo dokaz koristili nejednakost (5).

Mišljenja smo da će ovaj članak biti od velike koristi za sve učenike koji pokazuju veći interes za matematiku i imaju poseban afinitet za dokazivanje algebarskih i nekih drugih nejednakosti.

LITERATURA

1/ A. Marić (2004.): *Matematika extra*, I dio, Nakladnički niz Šilobod, Zagreb.

2/ Š. Arslanagić (2008.): *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo.

3/ Š. Arslanagić (2011.): *Više dokaza jedne nejednakosti*, Matematika i škola, god. 12, br. 59, Element, Zagreb.