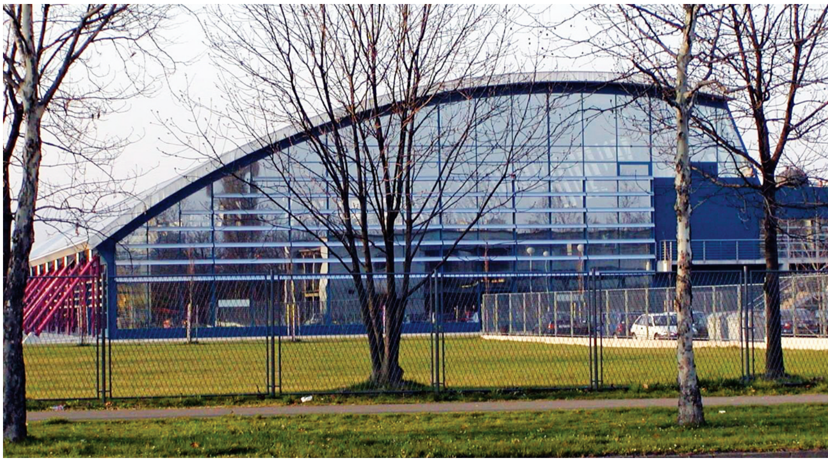
Primjena računalnoga programa *Graph* u poučavanju primjene integralnoga računa

Bojan Kovačić, Zagreb



U radu se izlažu vlastita nastavna iskustva autora u primjeni računalnoga programa *Graph* u obradi nastavne cjeline *Primjena određenoga integrala na računanje površina ravninskih likova* u sastavu matematičkih predmeta na stručnim studijima Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu. Navode se neki problemi uočeni u obradi navedene nastavne cjeline. Potom se na metodički odabranim primjerima detaljno opisuje postupak određivanja površine nekih ravninskih likova s pomoću programa *Graph*, pa se zaključuje da bi u nastavnoj praksi bilo optimalno kombinirati analitičko rješavanje i rješavanje s pomoću programa *Graph*.[1]

Uvod

U nastavi matematičkih predmeta na 1. godini stručnih studija Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu predviđena je obrada nastavne cjeline *Primjena određenoga integrala na računanje površina ravninskih likova*. Ta nastavna cjelina zamišljena je kao pokazatelj tipične primjene integralnoga računa realne funkcije jedne realne varijable. U okviru te cjeline rješavaju se različiti zadatci koji se odnose na ravninske likove omeđene krivuljama čije su jednadžbe zadane u eksplicitnom, implicitnom ili parametarskom obliku.

Službenim nastavnim planom navedenih matematičkih predmeta predviđeno je isključivo analitičko rješavanje navedenih zadataka, odnosno

Mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač, Tehničko veleučilište u Zagrebu, `bojan.kovacic@tvz.hr`

[1] Rad je prezentiran na 8. kongresu nastavnika matematike Republike Hrvatske u okviru sekcije za visoko školstvo.

rješavanje bez korištenja računalnih programa. Zbog prirode zadatka, uz svaki zadatak potrebno je nacrtati ili barem skicirati odgovarajuće ravninske krivulje. U svrhu izrade tih krivulja, odnosno ravninskih likova, kao pogodan metodički računalni program odabran je program *Graph*.

Problem interpretiranja određenoga integrala kao površine

Na temelju iskustava s nastave i usmenih ispita, tvrdimo da će većina studenata na pitanje "Kako biste geometrijski interpretirali određeni integral realne funkcije na segmentu?" dati odgovor koji počinje riječima "To je površina ravninskoga lika..." Taj je odgovor najvećim dijelom posljedica primjene računanja određenih integrala u drugim predmetima (fizika, osnove elektrotehnike). U tim se predmetima obično promatraju procesi modelirani nenegativnim integrabilnim realnim funkcijama čija je domena podskup skupa $[0,+\infty\rangle$. Određeni integrali takvih funkcija (na nekom segmentu koji je također podskup skupa $[0,+\infty\rangle$) su nenegativni realni brojevi koje je smisleno geometrijski interpretirati kao površine odgovarajućih ravninskih likova.

Problem nastaje u poopćavanju te interpretacije na *bilo koju* integrabilnu realnu funkciju. Kao posljedica definicije određenog integrala (preko suma oblika $m\cdot(b-a)$ ili $M\cdot(b-a)$, pri čemu su m, M minimum i maksimum (*infimum* i *supremum*) funkcijskih vrijednosti na segmentu $[a,b]$, te geometrijske interpretacije umnožaka $m\cdot(b-a)$ ili $M\cdot(b-a)$ kao "površina upisanih i opisanih pravokutnika"), pojavljuje se problem "negativne površine" ravninskog lika određenoga grafom funkcije koji je smješten ispod osi apscisa. Dakle, treba razlikovati matematički pojam površine ravninskog lika (kao uvijek nenegativnoga realnoga broja) od vrijednosti određenog integrala (koja može biti i negativan broj).

Računalni programi (najčešće) određuju vrijednost određenoga integrala, iako navode da izračunavaju površinu ravninskog lika. U takve računalne programe pripada i program *Graph*. Na ovome mjestu želimo istaknuti da je na navedenu interpretaciju nužno upozoriti studente. Zbog toga je primjereno istaknuti da se za *bilo koju* realnu funkciju f integrabilnu na segmentu $[a,b]$ površina ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$ i $x=b$ može izračunati prema formuli:

$$P=\int_a^b |f(x)|\,dx \tag{1}$$

Sljedeći tipični problem u interpretaciji određenoga integrala kao površine ravninskoga lika jest promatranje položaja ravninskoga lika (samo) u odnosu na os apscisa. Mnoge površine ravninskih likova mogu se znatno brže i jednostavnije izračunati ako se promatra položaj lika u odnosu na os ordinata (tj. integriranjem po varijabli y). Zbog toga treba upozoriti studente da, nakon što izrade pripadnu sliku/skicu, promotre položaj lika u odnosu na svaku koordinatnu os, pa tek tada odaberu najpogodniju varijablu integracije.

Naposljetku, izdvojimo i tip zadatka u kojemu se traži izračunavanje površine ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y=g(x)$, $y=f(x)$, $x=a$ i $x=b$, pri čemu za svaki $x\in[a,b]$ vrijedi nejednakost $g(x)\le f(x)$. Ta je površina jednaka:

$$P=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \tag{2}$$

U ovom je slučaju metodički primjereno dodatno objasniti studentima da površina lika ne ovisi o njegovu položaju u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini (što je, zapravo, u proturječju s ranije spomenutom dogovorno definiranom negativnom površinom!) i da formulu (2) studenti mogu zapamtiti u obliku: "Površina je jednaka integralu razlike veće i manje funkcije". Pritom treba uočiti da je, zbog pretpostavke $g(x)\le f(x)$, podintegralna funkcija u (2) nenegativna na segmentu $[a,b]$, pa prilikom računanja površine s pomoću formule (2) nije potrebno koristiti znak apsolutne vrijednosti.

Može se uočiti da se formula (1) također dobiva kao posljedica formule (2). Naime, za funkciju g čiji je graf smješten ispod osi apscisa, tj. čije su funkcijske vrijednosti negativne, uzimamo kao funkciju f konstantnu funkciju $f(x) = 0$. Sada vrijedi $g(x) \leq f(x)$, a prema (2) površina je jednaka:

$$P = \int_a^b (0 - g(x))\,dx = \int_a^b -g(x)\,dx = \int_a^b |g(x)|\,dx.$$

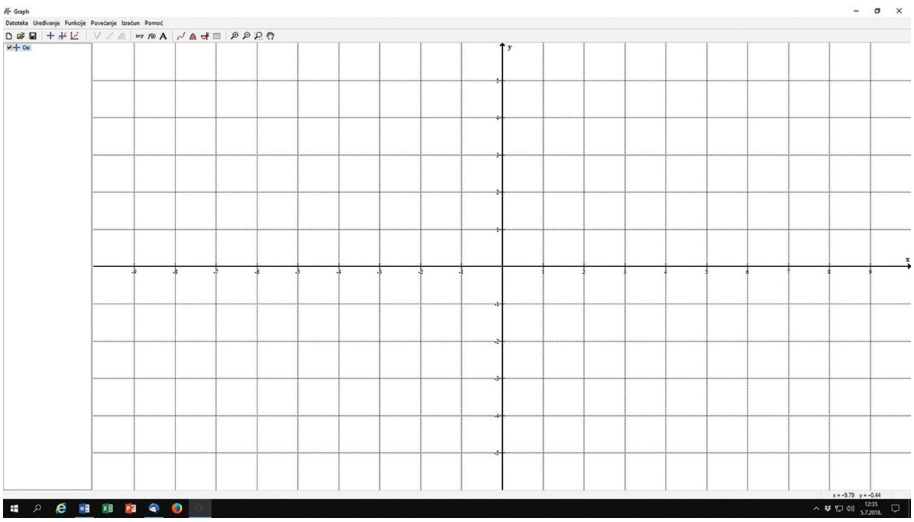
Prije negoli pogledamo primjenu programa *Graph* na nekoliko tipičnih primjera iz ove nastavne cjeline, navodimo osnovne podatke o tom programu.

Osnovno o računalnom programu *Graph*

Računalni program *Graph* pripada u *open-source*[2] računalne programe namijenjene ponajprije crtanju grafova matematičkih funkcija u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Pravila tih funkcija mogu biti zadana u standardnom (eksplicitnom), parametarskom i polarnom obliku. Također, program omogućuje i crtanje nizova točaka, tangente i normale na krivulju u nekoj točki, šrafura koje označavaju ravninske likove itd. Zainteresiranoga čitatelja upućujemo na [2]. Najnovija verzija programa besplatno je dostupna na mrežnoj stranici `http://www.padowan.dk/download/`.

Za uspješno korištenje programa, odnosno zadavanje pravila funkcija, dovoljno je poznavati sintaksu koja se primjenjuje u MS Excelu. Rad u MS Excelu studenti uče tijekom svojega srednjoškolskoga obrazovanja, pa se može smatrati da u trenutku obrade nastavne cjeline o tipičnim primjenama određenoga integrala imaju potrebno informatičko predznanje. Smatramo primjerenim istaknuti da većina studenata 1. godine stručnih studija na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu u pravilu nema (dovoljno) iskustava s različitim programskim jezicima, niti do trenutka obrade tipičnih primjena određenoga integrala ima odslušan predmet *Programiranje*, pa je zato metodički odabran računalni program u kojemu ta iskustva nisu potrebna.

Radni prozor programa *Graph* prikazan je na slici 1. Kako koristiti pojedine izbornike i opcije, pokazat ćemo na konkretnim primjerima u sljedećoj točki.



Slika 1. Radni prozor programa *Graph*

[2] Sintagma *open-source* označava cijeli skup metoda koje se koriste u razvoju računalnih aplikacija, pri čemu su cijeli proces razvoja i njegovi rezultati dostupni javnosti bez posebnih ograničenja. U nas se ta sintagma često (pogrešno!) prevodi kao aplikacija s otvorenim kodom. To je samo djelomično točno jer je izvorni kôd zapravo krajnji rezultat procesa razvoja aplikacije.

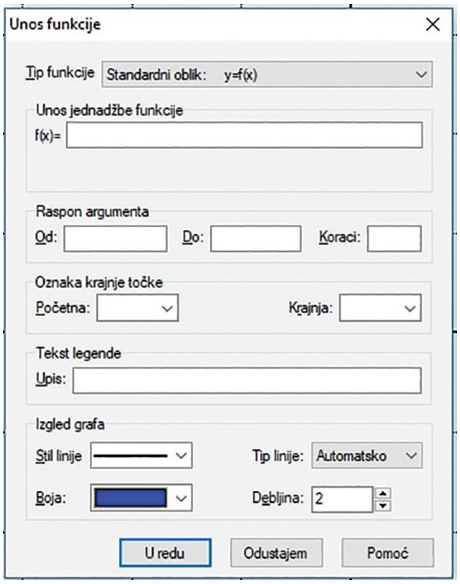
Primjeri primjene programa *Graph*

Odabrani primjeri pripremljeni su prema primjerima iz [1], [3] i [4]. Radi izbjegavanja povećanja opsega teksta, navodimo kratku uputu za rješavanje i/ili krajnji rezultat. Provedbu postupka rješavanja prepuštamo čitatelju.

Primjer 1. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljom $y = 1 - x^2$ i osi apscisa.

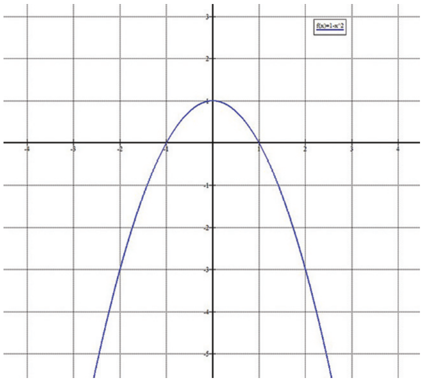
Analitičko rješenje: $P = \dfrac{4}{3}$ kv. jed.

Rješenje s pomoću programa Graph: Otvorimo program *Graph*. Pritisnemo tipku `Ins` na tipkovnici. Dobivamo dijaloški okvir prikazan na slici 2.



Slika 2. Dijaloški okvir za unos funkcije u programu *Graph*

Kliknemo mišem u prazan pravokutnik neposredno pokraj natpisa `f(x)=`. Utipkamo: `1-x^2`. Sve ostale pravokutnike ostavimo nepromijenjenima. Potom kliknemo na `U redu`. Dobivamo sliku 3.



Slika 3. Krivulja $y = 1 - x^2$

Potom kliknemo lijevom tipkom miša na izbornik `Izračun`, pa u padajućem izborniku odaberemo opciju `Krem`.[3] U donjem lijevom kutu radnoga prozora pojavljuje se dijaloški okvir za unos potrebnih podataka (vidjeti sliku 4).

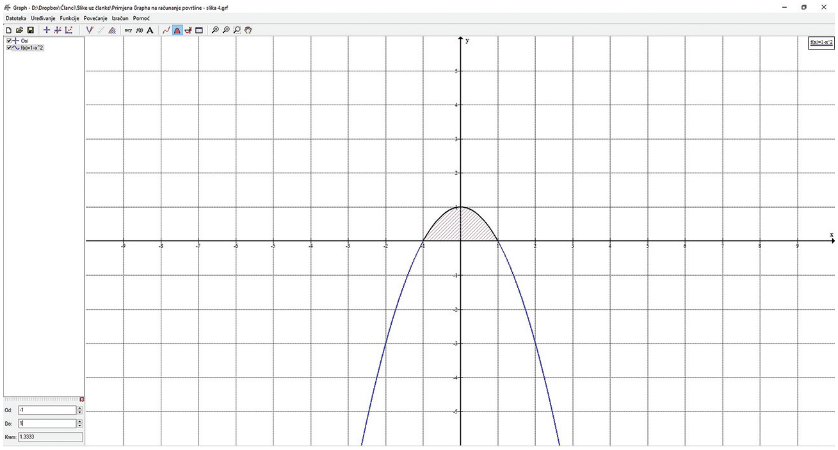
Slika 4. Dijaloški okvir za unos granica integracije u programu *Graph*

S pomoću slike 3 zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx.$$

Kliknemo mišem u pravokutnik neposredno pokraj natpisa `Od:`. Donja granica integracije jednaka je -1, pa u taj pravokutnik upisujemo -1. Potom kliknemo mišem u pravokutnik neposredno pokraj natpisa `Do:`. Gornja granica integracije jednaka je 1, pa u taj pravokutnik upisujemo 1. Nakon što upišemo 1 u pravokutniku neposredno pokraj natpisa Krem: pojavljuje se tražena površina izračunana s točnošću od: 10^{-4}: 1.3333. Istovremeno je osjenčan i ravninski lik čiju smo površinu izračunali (vidjeti sliku 5).

[3] U engleskoj verziji programa ova je opcija (ispravno) nazvana Area. Za očekivati je poboljšanje hrvatskoga prijevoda. Svi određeni integrali se, inače, računaju primjenom Gauss-Kronrodove kvadraturne formule s ukupno 21 čvorom. Za detalje o ovoj metodi vidjeti npr. [5].



Slika 5. Rješenje primjera 1

Napomenimo da program *Graph* ispisuje vrijednosti u obliku decimalnih brojeva zaokruženih na četiri decimalna mjesta (tj. s točnošću od 10^{-4}).

Primjer 2. Izračunajte površinu lika koji zatvaraju krivulja $y = x^2 - 4 \cdot x + 3$ i os apscisa.

Analitičko rješenje: $P = \frac{4}{3}$ kv. jed.

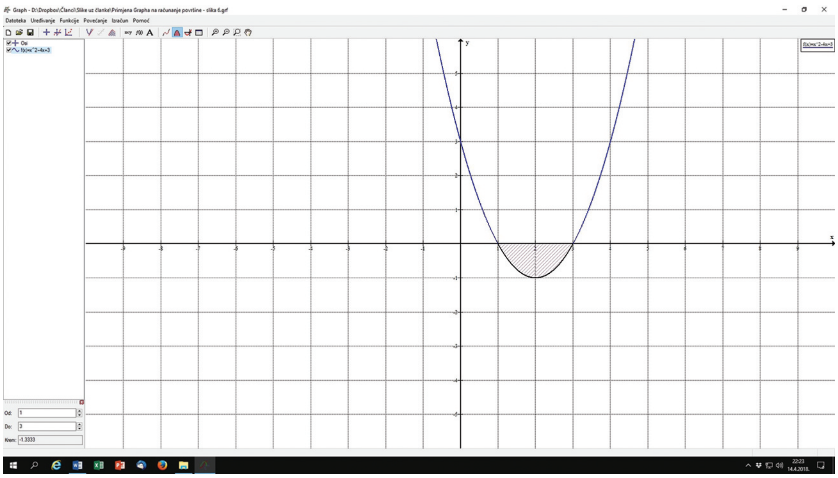
Rješenje s pomoću programa Graph: Provedemo postupak analogan onom iz primjera 1. U pravokutnik neposredno pokraj natpisa `f(x)=` upišemo: `x^2-4x+3`. Uočimo da je tražena površina jednaka:

$$P = \int_1^3 |x^2 - 4 \cdot x + 3| \, dx.$$

Donja granica integracije jednaka je 1, a gornja 3. Naposljetku dobivamo sliku 6.

Iz pravokutnika pored natpisa `Krem:` očitamo: -1.3333. Negativan predznak dobivenoga rezultata smo mogli i očekivati jer se osjenčani ravninski lik nalazi ispod osi apscisa, pa *Graph* dogovorno pretpostavlja da je površina toga lika negativna.

Napomena 1. Za razliku od npr. MS Excela, *Graph* dozvoljava izostavljanje znaka * koji oz-



Slika 6. Rješenje primjera 2

načava množenje realnih brojeva. Zbog toga smo u primjeru 2 jednadžbu krivulje mogli zadati ne koristeći taj znak. Dakako, i unos `x^2-4*x+3` također bi bio ispravan.

Primjer 3. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljama $y = \arcsin x$, $x = 1$ i objema koordinatnim osima.

Analitičko rješenje: Primijetimo da se tražena površina brže i jednostavnije izračuna ako se za varijablu integracije odabere varijabla y. U tom slučaju je:

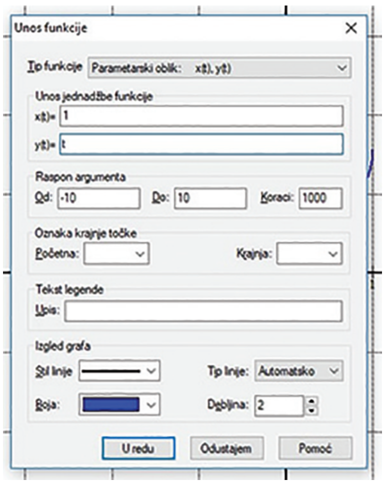
$$P = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy = \frac{\pi - 2}{2} \text{ kv. jed.}$$

Rješenje s pomoću programa Graph: Krivulju $y = \arcsin x$ nacrtamo koristeći postupak opisan u primjeru 1. Podsjetimo da se ta funkcija zadaje s pomoću ugrađene funkcije `asin`, pa u pravokutnik pored natpisa `f(x)=` treba upisati `asin(x)`.

Pravac $x = 1$ nacrtamo koristeći se parametarskim oblikom jednadžbe toga pravca:

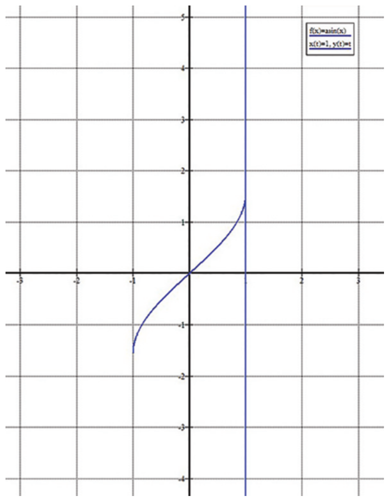
$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t. \end{cases}$$

Pritisnemo tipku `Ins`, pa u padajućem izborniku pored natpisa `Tip funkcije:` odaberemo opciju `Parametarski oblik x(t), y(t):`. U pravokutnik pored natpisa `x(t):` upišemo `1`. U pravokutnik pored natpisa `y(t):` upišemo `t`. Ostale pravokutnike ostavimo nepromijenjene (vidjeti sliku 7).



Slika 7. Unos podataka za crtanje pravca $x = 1$

Dobivamo sliku 8.



Slika 8. Prikaz krivulja $y = \arcsin x$ i $x = 1$.

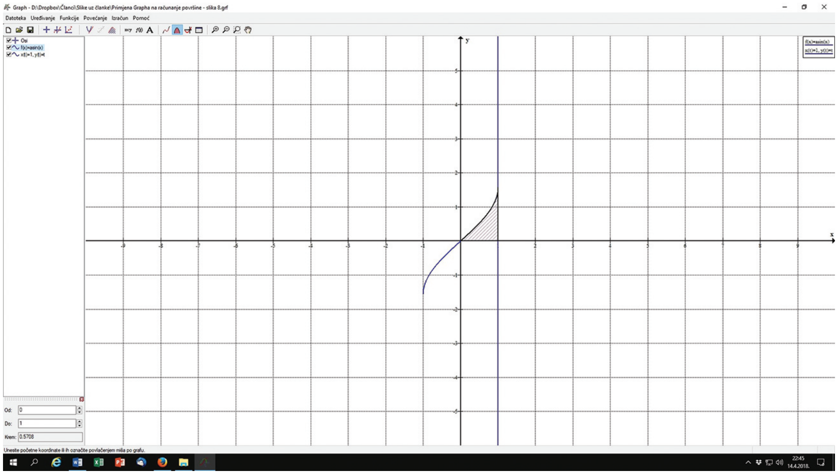
Točne koordinate sjecišta pravca $x = 1$ i krivulje $y = \arcsin x$ vrlo lagano odredimo analitički:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1, \\ y = \arcsin x \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1, \\ y = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow S = \left(1, \frac{\pi}{2}\right).$$

U polaznim postavkama programa pretpostavlja se da je nezavisna varijabla označena slovom x (iako se oznaka osi apscisa može promijeniti tako da ta os bude označena kao i nezavisna varijabla u zadatku koji se rješava). Zbog toga *Graph* omogućuje integriranje isključivo prema varijabli x. Zaključujemo da je tražena površina jednaka:

$$P = \int_0^1 \arcsin x \, dx.$$

Mišem kliknemo na natpis `f(x)=asin(x)` u gornjem lijevom dijelu radnoga prozora. Na taj način označimo funkciju koja će nam biti podintegralna funkcija. Postupkom opisanim u primjeru 1 (donja



Slika 9. Rješenje primjera 3

granica integracije je 0, a gornja 1) dobivamo da je tražena površina jednaka 0.5708 kv. jed. (vidjeti sliku 9).

Lako se provjeri da vrijedi:

$$\frac{\pi - 2}{2} \approx 0.5707963.$$

Primjer 4. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljom $y^2 = 9 \cdot x$ i pravcem $x = 4$.

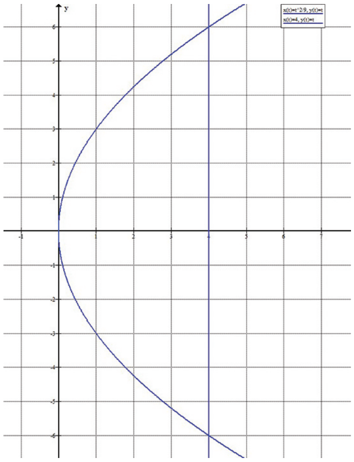
Analitičko rješenje: I u ovom je slučaju traženu površinu moguće brže i jednostavnije izračunati integriranjem po varijabli y:

$$P = 12 \cdot 4 - \int_{-6}^{6} \frac{y^2}{9}\, dy = 32 \text{ kv. jed.}$$

Rješenje s pomoću programa Graph: *Graph* nema opciju crtanja ravninskih krivulja zadanih u implicitnom obliku ili u obliku $x = f(y)$. U takvim slučajevima najjednostavnije je napisati jednadžbu krivulje u parametarskom obliku (tj. parametrizirati krivulju). U ovom slučaju jednadžba krivulje $y^2 = 9 \cdot x$ zapisana u parametarskom obliku glasi:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{9}, \\ y = t. \end{cases}$$

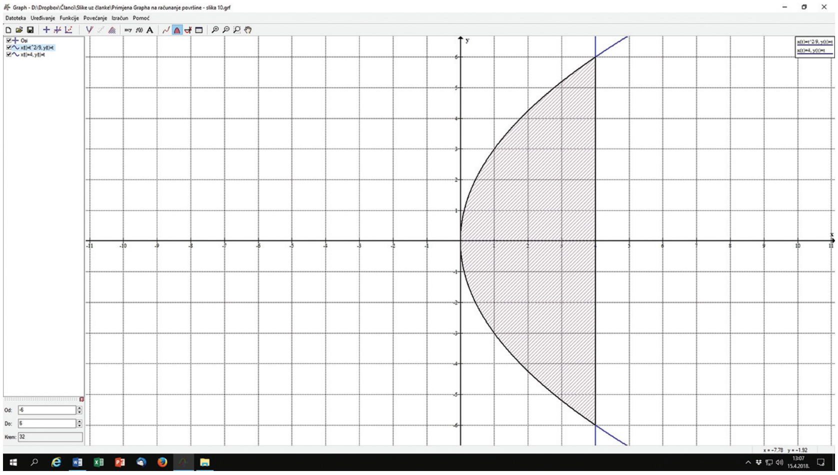
Postupkom opisanim u rješenju primjera 3 (crtanje pravca $x = 4$) nacrtamo obje zadane krivulje. Dobivamo sliku 10.



Slika 10. Krivulje $y^2 = 9x$ i $x = 4$

Uočavamo da se zadane krivulje sijeku u točkama čije su koordinate $(4, 6)$ i $(4, -6)$. Kliknemo mišem na izbornik `Izračun`, odaberemo opciju `Krem`, pa u pravokutnik pokraj natpisa `Od:` upišemo -6, a u pravokutnik pokraj natpisa `Do:` upišemo 6. U pravokutniku pored natpisa `Krem:` ispisat će se: 32 (vidjeti sliku 11).

Napomena 2. Podsjetimo da se površina lika omeđenoga krivuljom $\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \end{cases}$ za $t \in [a, b]$,



Slika 11. Rješenje primjera 4

i osi apscisa računa prema formuli:

$$P = \int_a^b f_2(t) \cdot f_1'(t)\,dt. \qquad (3)$$

U primjeru 4 su $f_1(t) = \frac{t^2}{9}$ i $f_2(t) = t$, pa uvrštavanjem u (3) slijedi:

$$P = \int_{-6}^{6} t \cdot \left(\frac{t^2}{9}\right)' dt = \frac{2}{9} \cdot \int_{-6}^{6} t^2\,dt = 32 \text{ kv. jed.}$$

Primjer 5. Izračunajte površinu ravninskoga lika omeđenoga krivuljom $r = 2 \cdot (1 - \cos\varphi)$, za $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi]$.

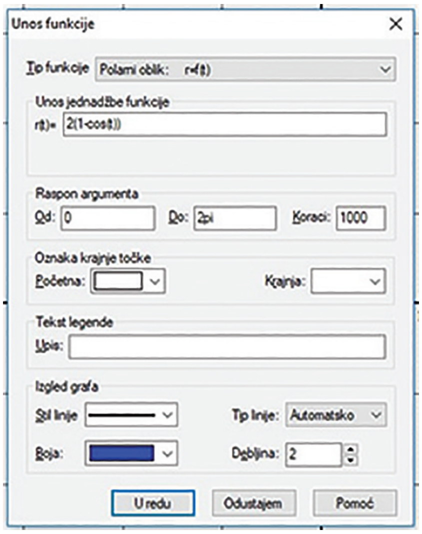
Analitičko rješenje: Tražena površina je jednaka

$$P = \int_0^{2\cdot\pi} \frac{1}{2} \cdot r^2\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\cdot\pi} (3 - 4 \cdot \cos\varphi + \cos(2 \cdot \varphi))\,d\varphi$$

$$= 6 \cdot \pi \text{ kv. jed.}$$

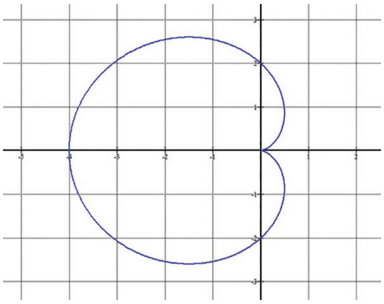
Rješenje s pomoću programa Graph: Na ovom ćemo primjeru pokazati kako se može odrediti površina ravninskoga lika omeđenoga krivuljom čija je jednadžba zapisana u polarnom obliku. Pritisnemo tipku `Ins`, pa u padajućem izborniku pokraj natpisa `Tip funkcije:` odaberemo opciju `Polarni oblik r=f(t)`. Potom u pravokutnik pokraj natpisa `r(t)=` upišemo: `2(1-cos(t))`. U pravokutnik pored natpisa `Od:` upišemo 0, a u pravokutnik pokraj natpisa `Do:` upišemo 2pi (vidjeti sliku 12).



Slika 12. Unos podataka u primjeru 5

Dobivamo sliku 13.

Potom kliknemo na izbornik `Izračun`, odaberemo opciju `Krem`, pa u pravokutnik pokraj natpisa `Od:` upišemo 0, a u pravokutnik pokraj natpisa `Do:`



Slika 13. Kardioida $r = 2(1 - \cos\varphi)$

upišemo 2pi. U pravokutniku pokraj natpisa `Krem:` ispisuje se 18.8496.

Napomena 3. Lako se provjeri da vrijedi:

$$6 \cdot \pi \approx 18.84955592.$$

Na temelju vlastita nastavna iskustva tvrdimo da je u nastavnom procesu optimalno kombinirati analitičku metodu i rješavanje s pomoću programa *Graph*. To se posebno odnosi na zadatke u kojima se određuje površina lika omeđenoga krivuljama $y = g(x)$, $y = f(x)$, $x = a$ i $x = b$, pri čemu za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi nejednakost $g(x) \leq f(x)$. U duhu poslovice da "dobra slika vrijedi tisuću riječi", u tim se slučajevima može zaključiti da "dobra slika predstavlja (barem) polovicu rješenja zadatka". Naime, iz slike se vrlo jasno može vidjeti odnos funkcija f i g, a nerijetko se mogu točno odrediti obje granice segmenta $[a, b]$ jer su u znatnom dijelu zadataka te granice cijeli brojevi. Time se ne skraćuje bitno samo postupak rješavanja zadatka, nego se zornije može predočiti lik čija se površina računa.

Nažalost, veličine nastavnih grupa na auditornim vježbama su uglavnom takve da ne omogućuju samostalan rad studenata na računalima, odnosno kombiniranje opisanih metoda. Zbog toga se korištenje *Grapha* uglavnom svodi na samostalan rad studenata uz eventualnu pomoć nastavnika na individualnim ili grupnim konzultacijama. Ipak, nadamo se da će znatno veće ulaganje u znanost i visoko obrazovanje zajedno s pokretanjem postupka cjelovite kurikularne reforme u dogledno vrijeme omogućiti implementaciju kombinacije opisanih metoda, a time i poboljšanje kvalitete nastave matematičkih predmeta na našim veleučilištima i samostalnim visokim školama.

Zaključak

Kao pomagala u nastavi matematičkih predmeta na veleučilištima i samostalnim visokim školama sve se više koriste različiti računalni programi. Zbog vrlo različitoga informatičkoga predznanja studenata, te programe treba odabrati tako da budu metodički pogodni i da ih većina studenata/korisnika brzo i jednostavno nauči koristiti. Jedan od takvih programa je i *Graph*. U radu je opisana primjena toga programa u obradi nastavne cjeline *Primjena određenoga integrala na računanje površine ravninskih likova*.

Međutim, postoje i druge moguće primjene istoga programa o kojima u ovom radu nije bilo riječi (npr. izračunavanje duljine ravninske krivulje iznad nekoga segmenta, određivanje jednadžbe tangente i jednadžbe normale povučene na neku ravninsku krivulju itd.). Uvjereni smo da bi primjena takvih računalnih programa u nastavi matematičkih predmeta pozitivno doprinijela ne samo poboljšanju kvalitete nastave, nego i povećanju interesa studenata za učenje matematike, te boljem razumijevanju matematičkih problema i načina njihova rješavanja. Rješavanje neke klase problema na međusobno različite načine, usporedba postupaka rješavanja i kvalitetna analiza dobivenih rezultata korisni su ne samo u matematici, nego i u brojnim drugim životnim područjima.

LITERATURA

1/ A. Aglić Aljinović *i dr.* (2014.): *Matematika 1*, Element, Zagreb.

2/ I. Johansen: *Graph*, verzija 4.4., `http://www.padowan.dk/doc/english/` (pristupljeno 15.4.2018.)

3/ S. Suljagić (2003.): *Matematika 1*, interna skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb.

4/ I. Slapničar: *Matematika 2*, elektronički udžbenik, `http://lavica.fesb.hr/mat2/` (pristupljeno 15.4.2018.)

5/ *Gauss-Kronrod quadrature formula*. Encyclopedia of Mathematics. `http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=GaušKronrod_quadrature_formula&oldid=22491` (pristupljeno 15.4.2018.)