

Izračunavanje površine mnogokuta s pomoću točkaste mreže

Alena Dika, Rijeka

U okviru Znanstvenog dana tijekom obilježavanja Dana škole nekoliko učenika sedmog razreda Osnovne škole Gornja Vežica, kojima predajem matematiku, predstavili su matematičku radionicu s ovogodišnjega školskoga projekta "Kamen".

Radi se o radionici "Pravilno u nepravilnom" koja se bavi matematičkim pojmom površine te istraživanjem najbrže metode za izračunavanje površine nepravilne ravne plohe kamena tj. ravne površine presjeka kamena zamišljenom ravninom kao što je vidljivo na slici 1.

Kamen smo posudili iz naše školske geološke zbirke – donacije Hrvatskog geološkog instituta. Radi se o sedimentnoj klasično-karbonatnoj stijeni lapor



Slika 1. Sedimentna klasično-karbonatna stijena lapor školske geološke zbirke



Učenici – sudionici radionice "Pravilno u nepravilnom"

iz doba tercijara geološkog razdoblja Zemlje koje je započelo prije otprilike 65 milijuna godina, a stijena je pronađena na Medvednici.

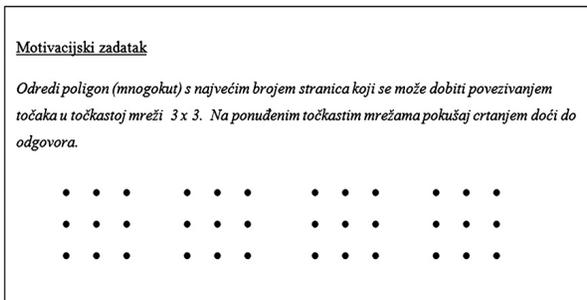
Tijekom radionice učenici su:

- rastavljali zadani nepravilni mnogokut na jednostavnije likove kojima znaju izračunati površinu
- s pomoću točkaste mreže izračunavali površinu zadanog nepravilnog mnogokuta koristeći se četirima metodama
- primjenjivali formule za izračunavanje površine kvadrata, pravokutnika i trokuta
- koristili računalni program GeoGebru
- zaključke radionice objedinili uz pomoć nekoliko *web 2.0* alata.

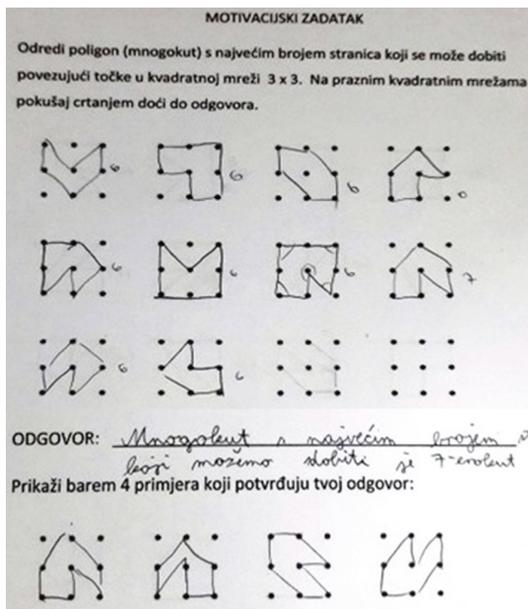
Učenike sam podijelila u tri grupe po pet učenika.

Uvod u radionicu: Motivacijski zadatak

Kako bih učenike motivirala i upoznala s točkastom mrežom te pojmovima koji će se tijekom odvijanja radionice spominjati, pripremila sam jednostavan motivacijski zadatak (slika 2). Svaka grupa dobila je isti motivacijski zadatak. Uz pomoć motivacijskog zadatka ponovila sam s učenicima formulu za površinu kvadrata, pravokutnika i trokuta, pojam mnogokuta, pravilnog mnogokuta, pojam stranice mnogokuta te dijagonale mnogokuta.



Slika 2: Motivacijski zadatak



Slika 3: Jedno od učeničkih rješenja motivacijskog zadatka

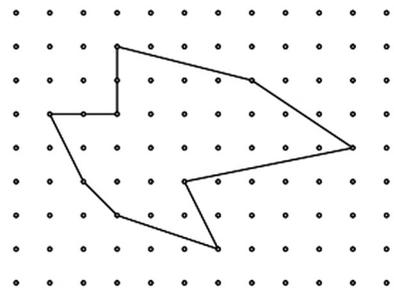
Tijekom rješavanja zadatka učenike je zanimalo mogu li spojnice točaka izlaziti iz okvira zadane točkaste mreže. Iako zadatak nije odviše zahtjevan, pitanje učenika potvrđuje njihov interes za temu radionice kao i činjenicu da je motivacijski moment uspješan. Zaključila sam da u zadatku nedostaje tražena informacija te sam učenike uputila da spojnice točaka moraju biti unutar točkaste mreže. Slika 3 prikazuje kako su učenici riješili motivacijski zadatak.

U nastavku radionice učenici su po grupama rješavali različite zadatke ovisno o metodi koju su koristili za rješavanje površine nepravilnog mnogokuta.

Središnji dio radionice

U nastavku radionice svaka je grupa dobila isti Nastavni listić 1 s nepravilnim mnogokutom u točkastoj mreži (slika 4).

Kolika je površina mnogokuta na slici?

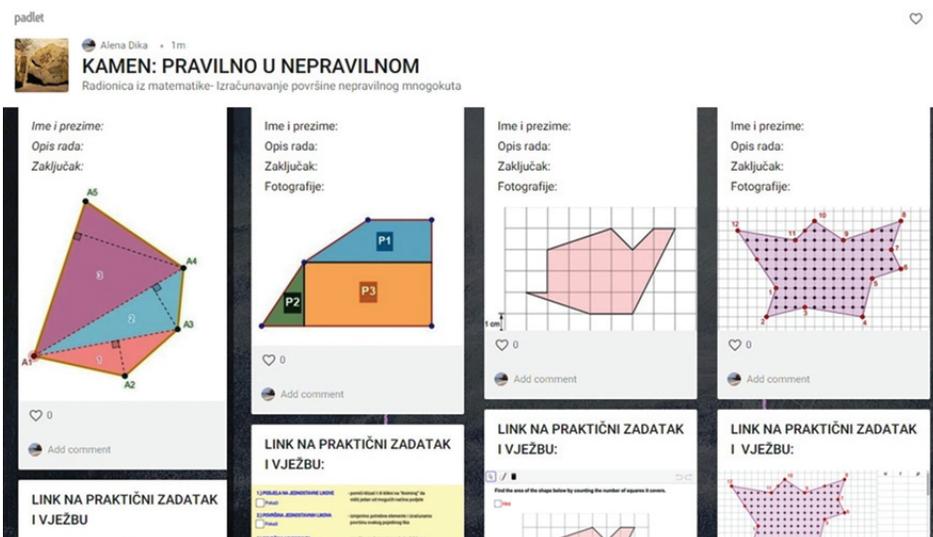


Slika 4: Nastavni listić 1 – Zadani mnogokut u točkastoj mreži

Za izračunavanje površine nepravilnog mnogokuta učenici su koristili četiri metode

- podjelu zadanog mnogokuta na trokute
- nadopunu zadanog mnogokuta do pravokutnika
- prebrojavanje kvadratića
- Pickovu formulu.

Nakon motivacijskog zadatka uz pomoć web 2.0 alata Padlet učenike sam upoznala s aktivnostima središnjeg dijela radionice (slika 5). Svaki stupac

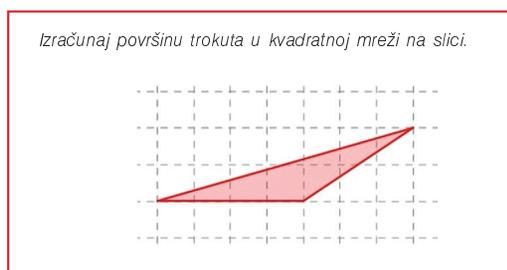
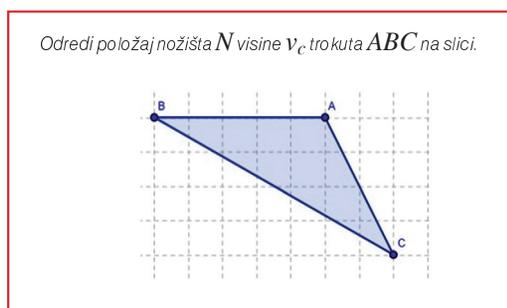
Slika 5. Prikaz središnjeg dijela radionice u Padletu¹

ili kolona Padlet *online* zida sadrži kratak opis svake metode uz pomoć koje će učenici izračunavati površinu zadanog nepravilnog mnogokuta.

Kreirala sam poveznicu i lozinku s pomoću kojih učenici mogu pristupiti Padlet *online* zidu na svojem računalu kod kuće i nakon radionice te koji će moći nadopuniti svojim bilješkama i opažanjima: opisom rada, fotografijama s radionice i zaključkom na kraju radionice. O tome nešto više u završnom dijelu ovog rada.

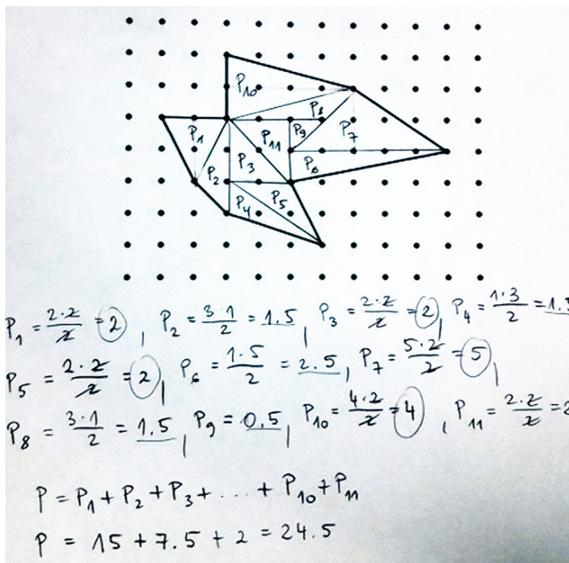
1. Grupa: Izračunavanje površine mnogokuta podjelom mnogokuta na trokute

Zadatak prve grupe bio je izračunati površinu zadanog nepravilnog mnogokuta podjelom površine mnogokuta na trokute, izračunati površine tih trokuta i zbrojiti ih. Kako bi učenici bili uspješniji u rješavanju ovoga zadatka, pripremila sam za njih zadatke za ponavljanje pojma visine trokuta i formule za površinu trokuta. Evo nekoliko primjera tih zadataka.



Nakon uvježbavanja sličnih zadataka učenici rješavaju Nastavni listić 1 podjelom zadanog nepravilnog mnogokuta na trokute (slika 6). Izračunali su da je površina nepravilnog mnogokuta 24.5 kvadratnih jedinica.

¹Fotografije i poveznice preuzete s: e-udžbenika "Sličnost i mnogokut (7. razred)", Željka Dijanić, 2014. <https://www.geogebra.org/m/dxybe9DP>, <https://www.geogebra.org/geogebra+institute+of+hong+kong> i <https://www.geogebra.org/m/qplnqpDJa>



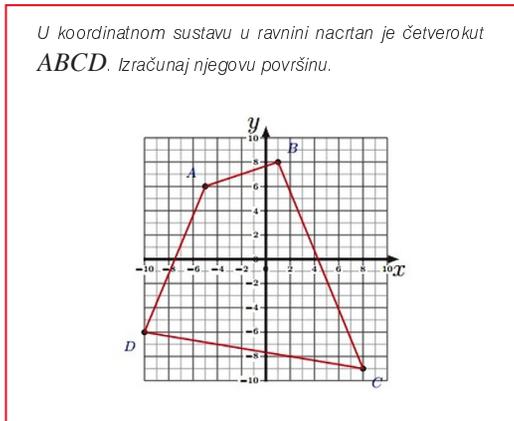
Slika 6. Izračunavanje površine mnogokuta podjelom na trokute

2. Grupa: Izračunavanje površine mnogokuta dopunom do pravokutnika

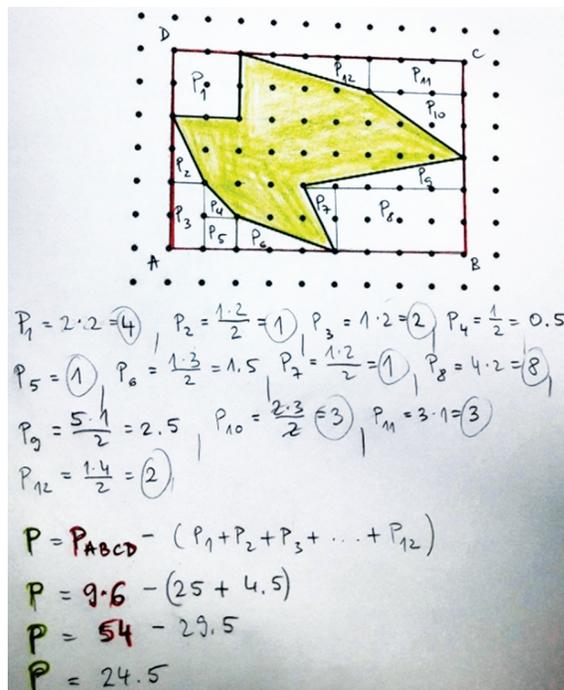
Zadatak druge grupe bio je nacrtati "najmanji" pravokutnik koji je opisan zadanom mnogokutu te izračunati dio površine pravokutnika izvan zadanog mnogokuta podjelom na pravokutnike, kvadrate i trokute. Učenici su izračunali njihove površine, zbrojili ih te njihov zbroj oduzeli od površine nacrtnog pravokutnika. U okvirima se nalaze primjeri zadataka za vježbu koje su učenici rješavali neposredno prije rješavanja Nastavnog listića 1.

Izračunaj i zaokruži točnu površinu geometrijskog lika.

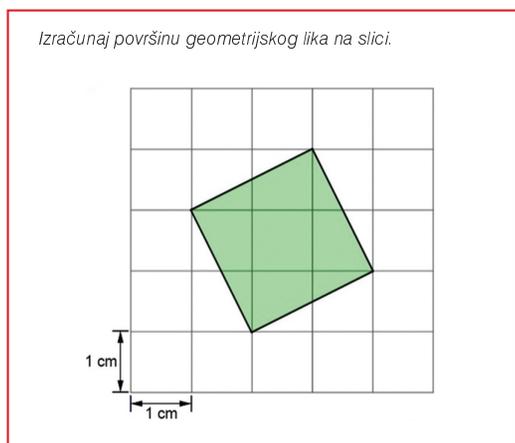
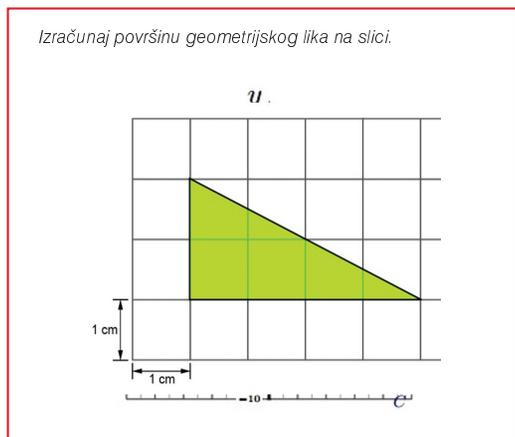
6cm^2
 4cm^2
 20cm^2



Nakon zadataka za vježbu učenici su riješili Nastavni listić 1 drugom metodom i izračunali da je površina zadanog nepravilnog mnogokuta također 24.5 kvadratnih jedinica. Izračunali su površinu nepravilnog mnogokuta oduzimanjem površina četverokuta i trokuta od istaknutog pravokutnika $ABCD$ kao na slici 7.



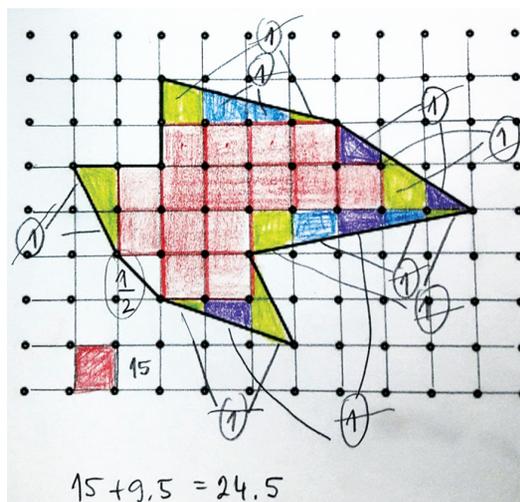
Slika 7. Izračunavanje površine mnogokuta nadopunom do pravokutnika



3. Grupa: Izračunavanje površine mnogokuta prebrojavanjem kvadratića

Zadatak treće grupe bio je izračunati površinu zadanog nepravilnog mnogokuta prebrojavanjem kvadratića. Povezivanjem čvorova točkaste mreže dužinama točkastu smo mrežu zamijenili kvadratnom mrežom. U okvirima slijede primjeri zadataka za vježbu koje su učenici rješavali neposredno prije rješavanja Nastavnog listića 1.

Učenici treće grupe također su izračunali da je površina nepravilnog mnogokuta 24,5 kvadratnih jedinica. Primijetimo način na koji su učenici spajali "nekvadratiće" – ne cijele kvadratiće. One koji zajedno čine jedan cijeli obojili su istom bojom. Na slici 8 pogledajte prikaz njihova rada.



Slika 8. Izračunavanje površine nepravilnog mnogokuta prebrojavanjem kvadratića

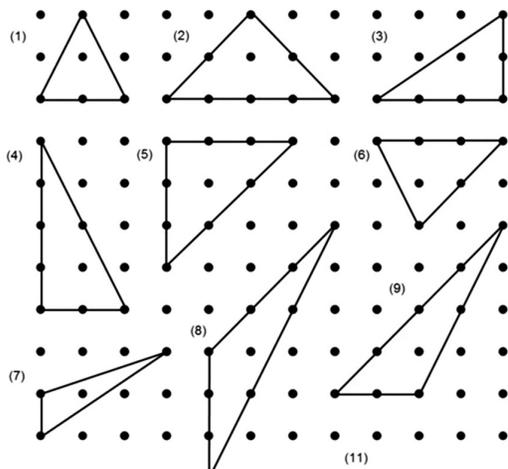
Pickova formula

Tijekom rješavanja zadataka učenici su ponovili i primjenjivali već stečeno znanje. Međutim, obrazovni ishod kreativne radionice uključuje i stjecanje novih znanja, stoga sam odlučila svoje učenike upoznati s austrijskim matematičarom Geomeom A. Pickom i njegovom formulom za izračunavanje površine nepravilnog mnogokuta u točkastoj mreži.

Smjestimo li mnogokut u kvadratnu ili točkastu mrežu, površinu mnogokuta možemo izračunati s pomoću unutarnjih i vanjskih čvorova toga mnogokuta. Vanjski čvorovi su one točke (sjecišta linija kvadratne mreže) koje se nalaze na stranicama mnogokuta, a unutarnji čvorovi one koje se nalaze unutar mnogokuta. Označimo li sa b broj vanjskih čvorova i sa i broj unutarnjih čvorova tada Pickova formula za površinu mnogokuta u točkastoj mreži glasi:

$$P = i + \frac{b}{2} - 1.$$

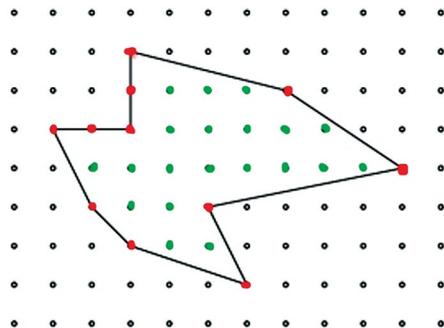
Kako bi se uvjerali u njezinu točnost, učenici su ispitivali Pickovu formulu prebrojavanjem unutarnjih i vanjskih čvorova trokuta u točkastoj mreži te izračunavanjem njihove površine primjenjujući formulu za površinu trokuta. Za ovu aktivnost pripremila sam novi nastavni listić (slika 9).



Slika 9. Nastavni listić za istraživanje Pickove formule

Površine trokuta s nastavnog listića koje su učenici izračunali uz pomoć formule za površinu trokuta odgovarale su površinama koje su izračunali uz pomoć Pickove formule. I konačno, odlučili smo primijeniti Pickovu formulu na zadatak s početka radionice (slika 10).

Unutarnje čvorove obojili smo zelenom bojom, a vanjske crvenom i prebrojili ih. S obzirom na već



Slika 10. Izračunavanje površine zadanog neppravilnog mnogokuta uz pomoć Pickove formule

spomenute oznake, možemo pisati:

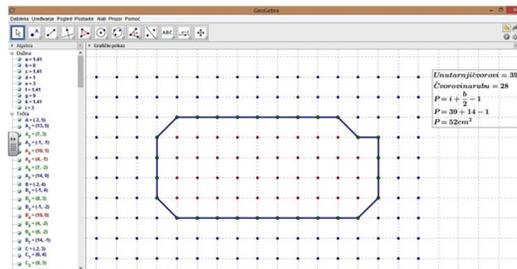
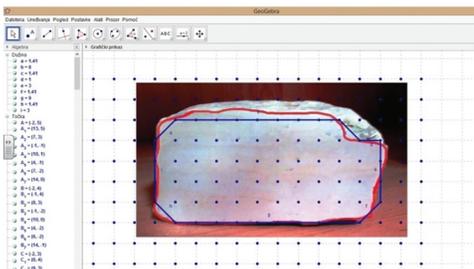
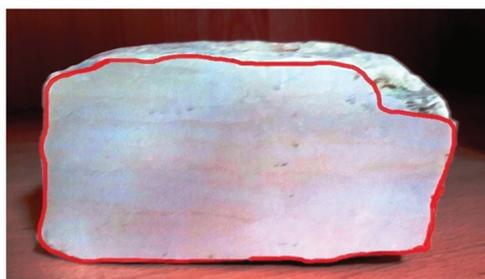
$$b = 11, i = 20$$

stoga je

$$P = i + \frac{b}{2} - 1$$

$$= 20 + \frac{11}{2} - 1 = 24.5.$$

Primjenom Pickove formule dobili smo isto rješenje kao i koristeći se ostalim metodama za izračunavanje površine.



Slika 11.

Završni dio radionice

Zaključujemo da je četvrta metoda, odnosno metoda u kojoj primjenjujemo Pickovu formulu najbrža metoda za izračunavanje površine nepravilnog mnogokuta u točkastoj mreži, odnosno najjednostavnija metoda kojom ćemo približno moći izračunati površinu istaknute ravne plohe kamena iz naše školske geološke zbirke.

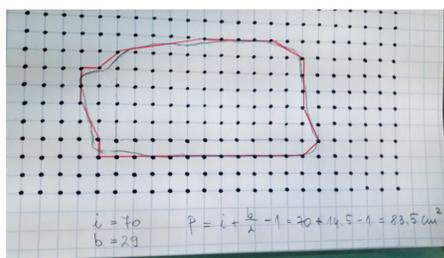
Međutim postavlja se pitanje: kako plohu kamena smjestiti u točkastu mrežu. Učenici predlažu matematički dinamični računalni program GeoGebru i rješavaju zadatak na sljedeći način: fotografiju plohe kamena približne veličine kao kamen iz geološke zbirke obrubili su crvenim rubom u programu Paint. Novu fotografiju kamena s crvenim rubom smjestili su u točkastu mrežu koju su nacrtali u GeoGebri. Crtanjem dužina tako da budu najbliže rubu plohe kamena dobili su nepravilni mnogokut plave boje. Nadalje, učenici uklanjaju fotografiju kamena, prebrajaju unutarnje i vanjske čvorove te s pomoću Pickove formule izračunavaju površinu plohe kamena. Pogledajmo to na slijedu fotografija na dnu prethodne stranice (slika 11).

Uočavanje nepravilnosti i nepreciznosti u izračunavanju

Bilo je iznimno zanimljivo promatrati učenički način rješavanja i marljivost koju su uložili u ovaj postu-

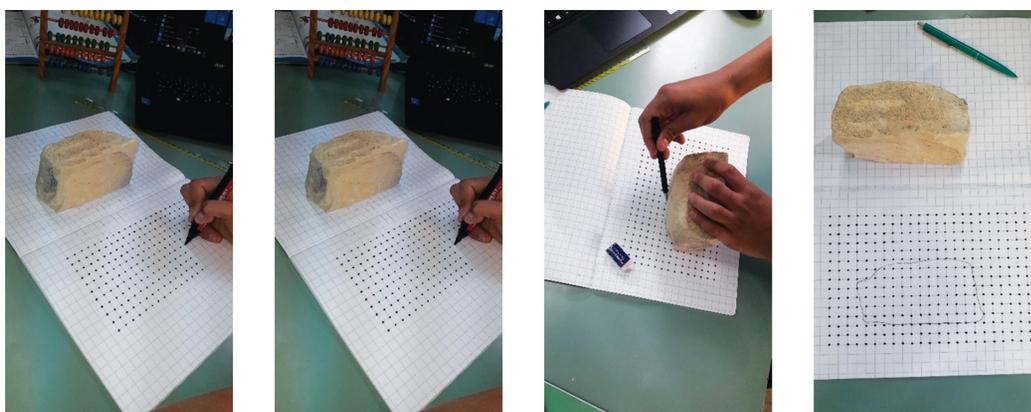
pak. Međutim ovo je bio i pravi trenutak da učenike uputim u njima do sada nepoznate naredbe programa GeoGebra za brzo i jednostavno izračunavanje površine mnogokuta: **Površina**[<točka>, ..., <točka>] ili **Površina**[<mnogokut>].

Uočavajući netočnosti i nepreciznosti njihovoga načina izračunavanja površine istaknute ravne plohe kamena s pomoću fotografije, predlažem učenicima da na papiru nacrtaju točkastu mrežu s razmakom 1 cm između čvorova te na njoj olovkom ocrtaju rubove istaknute ravne plohe kamena. Na fotografijama na dnu ove stranice (slika 12), prikazano je kako su to učenici napravili i koliko iznosi nova vrijednost površine istaknute plohe kamena koju su izračunali s pomoću Pickove formule.



Slika 13.

Učenici su izračunali površinu istaknute ravne plohe kamena sedimentne stijene lahor i ona iznosi približno 83.5 cm².



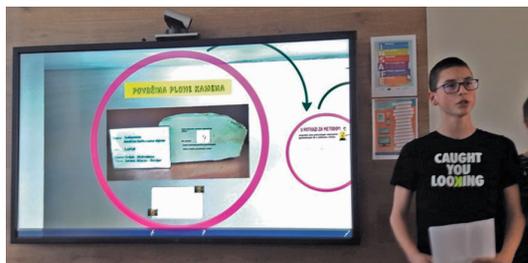
Slika 12.

$$i = 70, \quad b = 29, \quad P = i + \frac{b}{2} - 1 = 70 + \frac{29}{2} - 1 = 83.5 \text{ cm}^2.$$

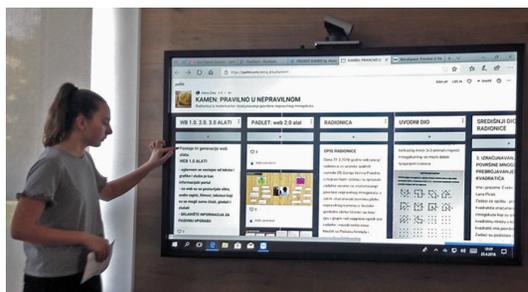
Učenci su primijetili razliku u rezultatima koji su dobiveni na dva načina (s pomoću fotografije i s pomoću ocrtavanja rubova ravne plohe stvarnog kamena na papiru). Utvrđujemo da fotografija nije bila jednake veličine kao stvarna površina ravne plohe kamena te da ih je valjalo prije primjene Pickove formule usporediti. Ipak, uspoređivanje različitih rezultata i pronalaženje razloga netočnosti može ovoj radionici dodati još jednu notu istraživačke vrijednosti u matematici.

Znanstveni dan: Prezentacija radionice

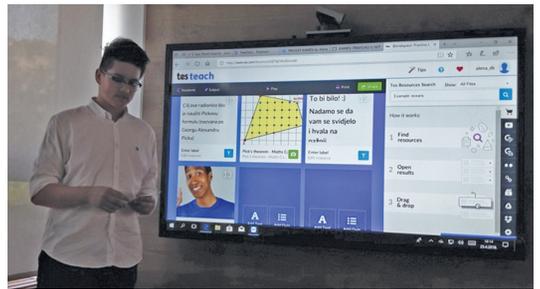
Na Znanstveni dan škole učenici su prezentirali aktivnosti radionice "Pravilno u nepravilnom" uz pomoć web 2.0 alata Prezzi, Padlet, Blendspace i Powtoon. Evo nekoliko fotografija njihovih prezentacija:



Slika 14. Prezentacija radionice uz pomoć Prezzi alata



Slika 15. Prezentacija radionice uz pomoć Padlet alata



Slika 16. Prezentacija radionice uz pomoć Blendspace alata



Slika 17. Prezentacija radionice uz pomoć Powtoon alata

Powtoon animaciju možete pogledati na poveznici: <https://www.powtoon.com/online-presentation/fRC60HbV0YU/powtoon/?mode=movie>

Zaključak

Tijekom rada u nastavi primijetila sam da učenici teško pamte formule za površinu geometrijskih likova, a posebno formulu za površinu trokuta. Svjesna važnosti pamćenja i primjene ove formule u kasnijem školovanju često sam razmišljala o metodama i oblicima rada s pomoću kojih bi učenici formulu za površinu lakše zapamtili. Radionica "Pravilno u nepravilnom" uklapala se u to razmišljanje.

Ovogodišnji projekt "Kamen" bio je također i poticaj da svojim učenicima pružim priliku da budu mladi istraživači i znanstvenici. Usudujem se reći da smo se tijekom nekoliko mjeseci bavili znanostu na jedan jednostavan, učenički način. Vjerujem da je to dobar put za sve učenike osnovne škole, a i one starije učenike da nauče drukčije i pomnije razmišljati o svemu što se oko njih događa – jer znanost nije samo skup znanja već ona podrazumijeva opažanje, razmišljanje, eksperimentiranje i objašnjavanje onoga što smo opazili ili iskustvom doživjeli.