

Što sve mogu kvadratići?

Tatjana Breščanski, Vinkovci

Živimo u vremenu kada su informacije tako lako dostupne, kada se ideje za razne nastavne materijale šire društvenim mrežama velikom brzinom, kada se sve više okrećemo izazovima tehnologije, učitelji su vrlo često glumci i demonstratori, a učenici publika. Tijekom nastavnog procesa učitelji posežu za divnim i maštovitim konkretima, a moj je stav da su konkretni najučinkovitiji u rukama djece. Vjerujem da će se mnogi čitatelji prisjetiti kako je nekada obavezni dio pernice naših prvoškolaca bio komplet plastičnih modela koji se sastojao od štapića, trokutića, kružića i kvadratića obojenih osnovnim bojama. Neizmjereno mi je žao što danas to više nije tako.

Omiljeni konkretni

Prije nekoliko su godina u pernice mojih šestaša za potrebe učenja računskih radnji s cijelim brojevima ušli kvadratići, crveni i plavi. I od tada, postali su moji omiljeni konkretni pa sada na njih navikavam i učenike petog razreda. Učenički kvadratići jednakih su veličina, izrezani su od tvrdog papira u crvenoj ili plavoj boji. Nije nužno imati crveni i plavi kolaž papir. Učenici mogu obojiti temperama bijeli papir i izrezati ga nakon sušenja ili mogu papir obojiti drvenim bojicama. Kao majka troje djece, uvidjela sam koliko je važno voditi računa o tome da djecu (čitajte: roditelje) ne opterećujemo kupovinom i nabavljanjem teže dostupnih materijala.



Slika 1. Učenički kvadratići

Moji kvadratići načinjeni su od debljeg papira, a na poledinu svakoga od njih zalijepljen je komadić magnetske trake¹ te tako postaju odličan demonstracijski materijal za bijelu ili zelenu ploču. U primjerima koji slijede pokazat ću upotrebu kvadratića konkretna u nekoliko različitih situacija.



Slika 2. Moji kvadratići

Zbrajanje cijelih brojeva

Potreba za promjenom u pristupu problemu zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva proizišla je nakon što sam uvidjela da upotreba određenog algoritma daje odlične kratkoročne rezultate, ali ne i dugoročne. Učenici navikli na algoritme poput: *minus i minus daju plus, od veće apsolutne vrijednosti*

Tatjana Breščanski, prof. savjetnica, OŠ Vladimira Nazora, Vinkovci tatjana.brescanski@skole.hr

¹ Magnetska traka dostupna je u nekim knjižarama, a ako ju naručujete internetom, potražite je pod nazivom *stripe magnets rubber*.

oduzmi manju i stavi predznak one veće, brojeve istog predznaka zbroji i stavi predznak... Nakon što učenici neko vrijeme ne koriste cijele brojeve, više ne znaju kada što treba zbrojiti, kada oduzeti, a nisu navikli razmišljati o brojevima. Kako bih postigla situaciju u kojoj učenici vide zadane brojeve, poslužila sam se idejom crvenih (toplih) i plavih (hladnih) žetona iz (meni i dalje omiljenog) udžbenika Petica 6².

Na početku ove cjeline učenike svakako upoznam s činjenicom da ćemo na nastavi raditi na način različit od onoga koji je opisan u udžbeniku. Zamolim ih i to da u slučaju nejasnoća radije pitaju mene na idućem satu ili na satu dopunske, nego da opterećuju roditelje (sa željom da izbjegnem zbrku u dječjim glavicama). Želim naglasiti i da pri zbrajanju cijelih brojeva izbjegavam koristiti riječ *plus*. Čini mi se puno prikladnije izreći veznik *i*. Kasnije će to pomoći pri razumijevanju oduzimanja (kao dodavanja/pribrajanja suprotnog broja).

Dakle, crveni kvadratić predstavlja pozitivni, a plavi kvadratić negativni broj. Osnovna je ideja, koju učenici vrlo lako prihvaćaju, da se jedan crveni i jedan plavi kvadratić poništavaju. Pogledajmo nekoliko primjera.

Primjer 1. Zbrajanje cijelih brojeva različitih predznaka.

a) $5 + (-8) =$

Učenik slaže kvadratiće u stupce, jedan uz drugi, 5 crvenih i dodaje 8 plavih kvadratića. Par crveni/plavi se poništava i učenik *vidi* da su ostala tri plava kvadratića pa zapisuje rješenje -3 , 3 jer je tri kvadratića, a *minus* jer su kvadratići plave boje.

b) $-4 + 10 =$

Učenik slaže u stupce, jedan uz drugi, 4 plava i 10 crvenih kvadratića. Poništiti će se 4 para i učenik *vidi* da je ostalo šest crvenih kvadratića pa zapisuje rješenje "6".

Nakon dovoljno primjera s malim brojevima, većina učenika će s lakoćom određivati rezultate. Vrlo



Slika 3. Prikaz zbrajanja

često učenici pitaju hoće li smjeti u kontrolnom radu koristiti kvadratiće, a moj je odgovor uvijek – da. No, dok dođe do provjere znanja, učenici su uglavnom automatizirali zbrajanje cijelih brojeva i niti ne pomišljaju izvaditi svoje kvadratiće na stol.

Pri radu često koristimo pitanje: *Kojih (kvadratića) ima više i za koliko?* To je pitanje važno zbog prijelaza na računanje s većim brojevima. Pogledajmo sljedeći zadatak.

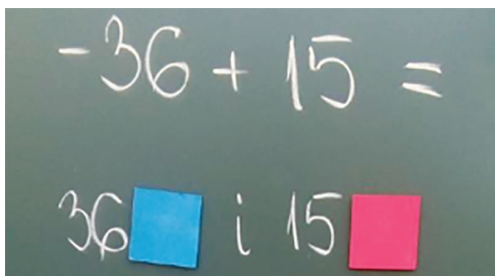
c) $-36 + 15 =$

Učenici često na ovakav zadatak reagiraju riječima: *nemamo dovoljno kvadratića*, ali redovito ima i onih koji odgovaraju: *pa, ne trebaju nam*. Važno je u ovim trenucima dati učenicima dovoljno vremena da sami dođu do rezultata. Ne trebate se bojati da ćete "izgubiti" previše vremena. Dugoročno gledano, ovo je dobro uloženo vrijeme. Najefikasnije se pokazalo pripremiti radne listiće koji će učenicima omogućiti napredovanje vlastitim tempom, a nama će osigurati vrijeme koje ćemo uložiti u dodatno pojašnjavanje učenicima koji su sporiji i nesigurniji.

Pri rješavanju zadataka na ploči ispod negativnog broja stavim plavi kvadratić, a ispod pozitivnog crveni. Učenici u bilježnicu zapisuju plavom bojom

² L. Kralj, Z. Čurković, D. Glasnović Gracin, S. Banić, M. Stepić (2007.): *Petica 6*, Zagreb: SysPrint.

36P i crvenom bojom 15C. Slijedi pitanje o kojemu su već navikli promišljati: Kojih je više? Odgovaraju "plavih" i automatski u rezultat pišu predznak minus. Za koliko? Odgovaraju "za 21" i dopisuju broj u rezultat. Kod većih brojeva neki će učenici potpisati brojeve i oduzeti ih. Naviknuti gledati brojeve prikazane kvadratićima, učenici vide da se traži **razlika** u broju kvadratića i da je prirodno oduzeti ih.



Slika 4. Kraći zapis

Primjer 2. Zbrajanje cijelih brojeva jednakih predznaka.

Ako su učenici prihvatili koncept rada s kvadratićima, zbrajanje cijelih brojeva jednakih predznaka postaje vrlo konkretno i zorno.

a) $-6 + (-7) =$

Slože li učenici šest plavih i još sedam plavih kvadratića, sasvim je jasno da su u igri samo plavi, i to njih 13. Učenici upisuju rezultat -13 i posve im je jasno zašto je to tako.

Prilikom poučavanja ovih sadržaja nemam običaj zapisivati nikakvo pravilo, nego učestalo ponavljam pitanja poput ovih: *Kakve kvadratiće imaš? Koliko je kojih? Kojih je više? Za koliko? Što predstavlja plavi (kvadratić)? Koji predznak pišemo? Zapisujemo li predznak?* i slično.

Oduzimanje cijelih brojeva

Oduzimanje cijelih brojeva uvodim ponovno s pomoću kvadratića. Zapišem zadatak npr. $6 - 4$ (uz redoviti dječji osmijeh i izvikivanje rezultata), ali postavim pitanje: *Kako bismo mogli, s pomoću*

naših kvadratića, prikazati ovaj račun – na dva različita načina? Prvi način učenici uglavnom odrade vrlo brzo: slože 6 crvenih kvadratića i potom maknu četiri. Drugi način predstavlja im izazov. Naravno, učenici znaju da bi rezultat trebao biti "dva crvena" i vrlo brzo dođu do toga da slože 6 crvenih i četiri plava kvadratića. I vrlo jednostavno prelazimo na to da minus, koji nam je do maloprije predstavljao računsku radnju oduzimanje, sada postaje predznak negativnog broja. Gledajući poslagane kvadratiće, mi ponovno čitamo: 6 crvenih i 4 plava. Oduzimanje kao računska radnja se izgubilo, preostaje nam zbrajati, a to znamo. Uz još nekoliko zadataka uvijek bavimo zapisivati oduzimanje s pomoću kvadratića te tek tada prelazimo na oduzimanje u skupu cijelih brojeva.

a) $-6 - 8 =$

Čitamo: minus 6 i minus 8, odnosno 6 plavih i još 8 plavih. Slika učenicima govori više od riječi.

b) $5 - 12 =$

Čitamo: 5 i minus 12, odnosno 5 crvenih i još 12 plavih. Kojih je više i za koliko?

c) U zadacima poput $-6 - (-7)$ učenicima je sasvim jasno da će prvi broj prikazati sa 6 plavih kvadratića, a drugi dio, $-(-7)$ prisjetit će se dobar dio njih, ima značenje "suprotno broju 7" (što je usvojeno pri učenju suprotnih brojeva) pa će to prikazati sa 7 crvenih kvadratića. Zbog složenijih zadataka koji slijede, potičem učenike da i zapišu na taj način: $-6 - (-7) = -6 + 7$.

Nakon nekog će vremena učenici spontano prestati koristiti kvadratiće. Neki će još određeno vrijeme u bilježnicu ispod brojeva zapisivati broj plavih i broj crvenih, a neki će samo pozitivne podvući crvenom, a negativne plavom bojom. Kako god, slika o cijelim brojevima formirala se, pri čemu su kvadratići odigrali značajnu ulogu.

Najveći zajednički djelitelj

U nastavnoj cjelini *djeljivost* (5. razred), na samom kraju cjeline učenike čekaju zadatci zadani riječima. Znatno dio učenika čak i te zadatke radi šablonski. Upravo zbog toga pokušala sam ove zadatke zadati na samom početku nastavne jedinice *najveći*

zajednički djelitelj. Zanimljivo je promatrati učenike kako takve zadatke rješavaju s pomoću kvadratića. U jednom zadatku kvadratići predstavljaju plave i crvene ruže, u drugom su to čokolade i lizalice, u sljedećem sir i salama, ovisno o mašti autora zadataka. Važno je učenicima u početku zadati zadatke za koje će imati dovoljan broj kvadratića pa preporučam neka učenici rade u paru (tada imaju zajedno po 40 kvadratića iste boje). Zanimljivo je slušati njihove rasprave, a posebno način na koji brane i obrazlažu svoja rješenja.

Primjer 1. *Od 16 crvenih i 24 plave ruže treba napraviti jednake bukete na način da svi cvjetovi budu iskorišteni.*

- Pronađi nekoliko načina na koji možeš složiti bukete. Koliko će u svakom buketu biti crvenih, a koliko plavih ruža?*
- Koliko se **najviše** buketa može napraviti? Koliko će u svakom buketu biti crvenih, a koliko plavih ruža?*

Primjer 2. *Od 15 čokolada i 25 lizalica treba napraviti jednake pakete.*

- Koliko se najviše paketa može napraviti?*
- Koliko će u svakom paketu biti čokolada, a koliko lizalica?*

Nemojte se iznenaditi ako u jednom satu riješite samo dva ovakva zadatka i nemojte biti zabrinuti ako nemate dovoljno vremena automatizirati rješavanje ovih zadataka. Važan je proces razmišljanja, važan je put kojim učenici dolaze do rješenja, važno je da učenici znaju objasniti što je to, zapravo, najveći zajednički djelitelj nekih dvaju brojeva.

Površina i opseg pravokutnika

U nastavnoj cjelini *skupovi točaka u ravnini* (5. razred) kvadratići su se pokazali puno praktičnijima nego crtanje u bilježnicu. Prakticiram i crtanje i skiciranje, ali kao predradnju svakako volim uvesti slaganje kvadratića. Njima je lakše manipulirati, učenici brže prate tijek svojih misli, lakše ispravljaju ako nisu točno riješili zadatak. Prije slaganja potrebno je provesti raspravu o mjernim jedinicama za

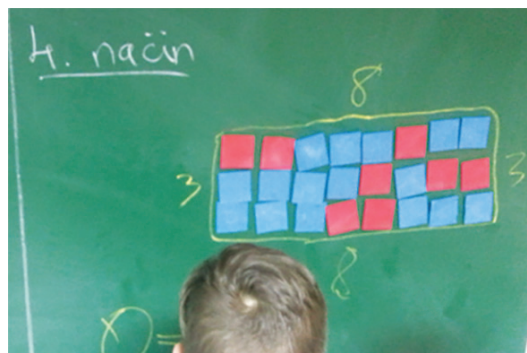
duljinu i za površinu, koje učenici znaju od ranije. Definiciju opsega pravokutnika učenici uglavnom usvoje u četvrtom razredu, ali uvijek ima i onih koji će znati zapisati formulu, a da ne znaju objasniti njezino značenje. Stoga i ovdje zastupam stav: razumijevanje prije formule, prije računanja.

S obzirom na to da naši kvadratići nemaju duljinu stranice 1 cm, ne možemo govoriti o centimetrima kvadratnim pa dogovorno uvodimo pojam kvadratnih jedinica. Učenici vrlo lako prihvaćaju taj pojam, ali pri izgovoru često izgovaraju jednostavno "kvadratića". Kasnije učenici prilično jednostavno prelaze na ostale mjerne jedinice za površinu jer sâm pojam površine vežu uz popločivanje dijela ravnine.

Primjer 1. *Prikaži nekoliko pravokutnika čiji je opseg 24 jedinice. Koji od njih ima najveću površinu?*

Primjer 2. *Prikaži nekoliko pravokutnika površine 18 kvadratnih jedinica. Koji od njih ima najmanji opseg?*

Primjer 3. *Prikaži nekoliko pravokutnika površine 16 kvadratnih jedinica.*



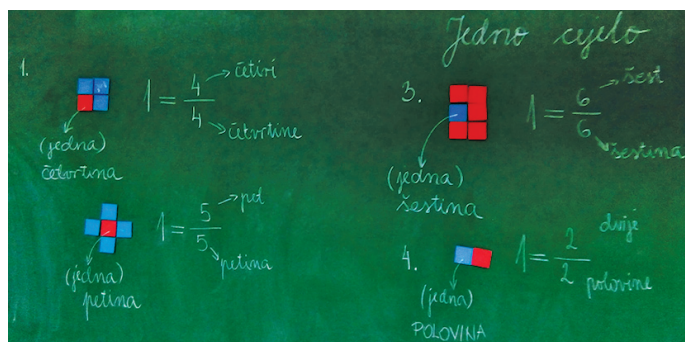
Slika 5. Jedno od učeničkih rješenja

Slijedi analiza i rasprava te neizbježna priča o tome je li i kvadrat pravokutnik.

Nakon ovih i njima sličnih zadataka obično slijedi vrlo zanimljiva rasprava. Učenike treba poticati na raspravu i pritom ih učiti pravilnom matematičkom izričaju.

Jedno cijelo

Nastavnu cjelinu *razlomci* (5. razred) počinjem uvođenjem pojma *jedno cijelo* nakon čega prirodno slijedi potreba za uvođenjem razlomka kao dijela cjeline. Naravno da ovdje neizbježno razgovaramo o *pizzama* i jabukama, ali složeni kvadratići jako lijepo mogu dočarati posudu punu kolača.



Slika 7. Ploča nakon rasprave

Nakon motivacijskog razgovora, slijedi samostalan rad učenika, rješavanje dvaju zadataka na radnom listiću (A5 format, dvostrano), a potom slijedi analiza i rasprava.

Prvi je zadatak prikazan na slici, u drugome je zadano 5 umjesto 4 kvadratića.

1. Složi lik koji se sastoji od 4 kvadratića.

Usporedi s prijateljima načine slaganja.

Skiciraj nekoliko načina.

Složeni lik predstavlja cjelinu. Matematičari cjelinu nazivaju JEDNO CIJELO, a pišu kao broj _____.

Tvoj složeni lik, jedno cijelo, sastoji se od _____ jednaka dijela.

Jedan taj dio nazivamo _____

ili samo _____.

Dakle, jedno cijelo ima _____.

Matematički zapis:

Slika 6. Dio radnog listića

Nakon rasprave učenici u bilježnicu rješavaju sljedeća dva zadatka: u trećem zadatku zadano je 6 kvadratića, a u posljednjem zadatku učenici sami odabiru broj kvadratića te ih rješavaju kao prethodne.

Tijekom rasprave učenici s pomoću mojih magnetnih kvadratića slažu svoja rješenja na bijeloj ploči, a posljednji u nizu slaže rješenje na zelenoj ploči – uz dogovor da ono što je zapisano na zelenoj, učenici zapisuju i crtaju u bilježnicu. Posebnu pažnju posvećujem matematičkom zapisu jer, očekivano, učenici ne znaju zapisati razlomak. No, vjerujte, imaju brojne ideje o zapisivanju pet petina ili šest šestina.

Slijedi uputa za rješavanje preostala dvaju zadataka s radnog listića i dogovor da zapis u bilježnici bude poput dosadašnjeg.

Mješoviti broj

Zapisivanje mješovitog broja u obliku nepravog razlomka (i obrnuto) uvodim također uz pomoć kvadratića.

Primjer 1. Koji je broj prikazan kvadratićima?



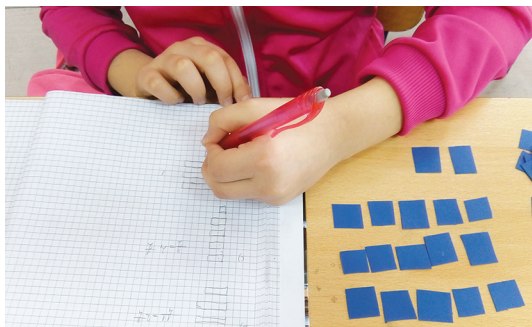
Slika 8. Prikaz mješovitog broja

Učenici uočavaju da se radi o 2 cijela te da se cijelo sastoji od triju jednakih dijelova pa su u pitanju trećine, od kojih je istaknuta samo jedna.

Učenici uglavnom zapisuju 2 cijela $\frac{1}{3}$ ili $2\frac{1}{3}$, nakon čega uvodimo skraćeni zapis $2\frac{1}{3}$ i pojam mješovitog broja.

Primjer 2. Zapiši $\frac{17}{5}$ kao mješoviti broj.

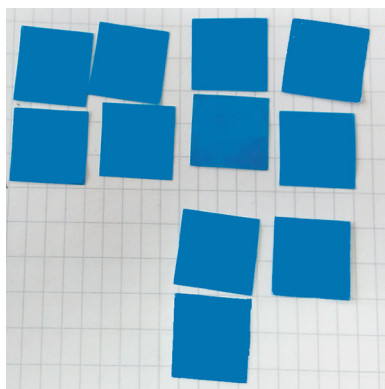
Neke je učenike potrebno navoditi, ali uglavnom je dovoljno upitati: *od koliko jednakih dijelova ćemo u ovom slučaju prikazati jedno cijelo?* Kad slože pet kvadratića kao jedno cijelo, daljnje slaganje i zapis broja odrađuju bez teškoća.



Slika 9. Prikaz nepravog razlomka u obliku mješovitog broja

Primjer 3. Zapiši broj $2\frac{3}{4}$ u obliku nepravog razlomka.

Jedino pitanje koje ovdje možemo postaviti je: *Što nam govori nazivnik?* Naravno, jedno cijelo sastoji



Slika 10. Prikaz mješovitog broja

se od četiriju četvrtina, tj. prikazujemo ga četirima kvadratićima. Nakon slaganja kvadratića učenici jednostavno prebroje kvadratiće i zapišu rješenje u obliku jednakosti.

Nakon dovoljnog broja primjera učenici će zadatke ovog tipa rješavati i bez slaganja kvadratića, ali uz usmeno obrazloženje koje će biti prikazano u sljedećem primjeru.

Primjer 4. Zapiši broj $5\frac{5}{6}$ u obliku nepravog razlomka.

Učeničko obrazloženje glasi otprilike ovako: *Imamo 5 cijelih, a svako ima šest šestina pa je to ukupno $\frac{30}{6}$, dodamo još onih pet šestina pa dobijemo $\frac{35}{6}$.* Slijedi zapis u obliku jednakosti.

Umjesto zaključka

Osim prikazanih postoje još mnogi primjeri gdje kao konkretne koristim kvadratiće, npr. *razlomak kao dio od cjeline, pojam kvadrata prirodnog broja, najmanji zajednički višekratnik, dijeljenje s ostatkom* (za učenike koji nisu usvojili dijeljenje do početka petog razreda) i dr.

Zašto baš kvadratići? Vrlo su praktični i zorni, ne zauzimaju puno mjesta u dječjim torbama (koje su ionako preteške), lako se njima manipulira i time potiče razvoj fine motorike. Nadalje, navikavanje učenika na rad s konkretima, usmjerit će ih na potrebu za modeliranjem različitih problemskih situacija u nastavi matematike i van nje.

Moje iskustvo govori da vrijeme koje vam se može učiniti izgubljeno – nije izgubljeno. Učenici postaju slobodniji, sigurniji u sebe i samostalniji, a njihovo znanje postaje trajnije.