Gaussov uskrsni algoritam

Tin Perkov, Zagreb

Vrlo složena crkvena pravila računanja datuma Uskrsa Gauss[1] je prezentacijski pojednostavnio algoritmom koji je u MiŠ-u opisan prošle godine, u članku autorice Sanje Sruk. Ovaj je tekst nadopuna tog članka objašnjenjima pojedinih koraka algoritma.

Uvod

Na pisanje ovog članka potaknula me sljedeća rečenica iz MiŠ-a br. 94, str. 185:

Nigdje nije navedeno potpuno objašnjenje ovih koraka, štoviše i sam Gauss je rekao da ne može dati cijelu analizu postupka koji ga je doveo do tog algoritma, ali možemo uživati u njemu diveći se briljantnosti Gaussova uma, kao što uživamo u mađioničarskim trikovima iako nam nije sasvim jasno kako su izvedeni. (S. Sruk)

Želim naglasiti da ovo nije polemički članak jer smatram da je gore citirano stvar osobnog osjećaja, koji dapače i dijelim što se tiče mađioničarskih trikova, ali ne i što se tiče matematičkih algoritama, za koje je moja osobna automatska reakcija da želim znati kako i zašto. Time se, dodao bih, ne gubi ni na magičnosti, kako lijepo primjećuje Pratchett[2]:

It doesn't stop being magic just because you know how it works. (T. Pratchett [2])

Opis algoritma

Uskrs bi u kalendaru trebao biti prvu nedjelju nakon prvog punog mjeseca nakon proljetne ravnodnevice (proljetne na sjevernoj Zemljinoj polutki, naravno). Kad bi doista bilo tako, Uskrs ne bi ovisio o izboru kalendara, gregorijanskog ili julijanskog, no datum punog mjececa mogao bi se razlikovati za jedan dan u različitim vremenskim zonama. Međutim, datum se zapravo ne računa na osnovi astronomskih pokazatelja, nego po složenim crkvenim pravilima koja ovise o izboru kalendara i uključuju između ostalog konvenciju da je proljetna ravnodnevica 21. ožujka, što je neprecizno i po gregorijanskom, a osobito po julijanskom kalendaru.

U Gaussovu algoritmu na više se mjesta koristi cjelobrojno dijeljenje s ostatkom, pri čemu je bitan upravo ostatak, pa ćemo radi sažetosti koristiti oznaku

$$n \mod k$$

za ostatak pri dijeljenju broja n brojem k. Ovdje je mod binarna operacija, no u objašnjenju Gaussova algoritma koristit ćemo tu oznaku s još jednim značenjem: pišemo

$$n \equiv m \mod k$$

i čitamo "n je kongruentno m modulo k" ako n i m imaju isti ostatak pri dijeljenju sa k, tj. ako je

$$n \mod k = m \mod k.$$

doc. dr. sc. Tin Perkov, Učiteljski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, `tin.perkov@ufzg.hr`

[1] Carl Friedrich Gauss (1777. – 1855.), njemački matematičar.
[2] Terry Pratchett (1948. – 2015.), engleski pisac.
[3] Uočimo anagram: S. Sruk ⟶ Uskrs!, vidi [4].

Uz ovu notaciju ponovit ćemo ovdje korake algoritma opisanog u članku S. Sruk[3], i to druge varijante iz tog članka.

U Gaussovu algoritmu koriste se konstante X i Y, o kojima će nešto više biti rečeno kasnije u članku. Zasad samo napominjem da su ovo u julijanskoj verziji algoritma zaista uvijek isti brojevi ($X = 15$, $Y = 6$), dok se u gregorijanskoj mijenjaju, doduše rijetko: samo na kraju stoljeća, i to ne svakog (trenutačno je $X = 24, Y = 5$, a od 2100. Y se povećava na 6, dok se X ne mijenja).

Za n-tu godinu, redom se definiraju brojevi A, B, C, D i E:

- $A = n \mod 19$
- $B = n \mod 4$
- $C = n \mod 7$
- $D = (19A + X) \mod 30$
- $E = (2B + 4C + 6D + Y) \mod 7$.

Datum Uskrsa je $(22 + D + E)$-ti ožujka ako je $22 + D + E \leq 31$, a inače $(D + E - 9)$-ti travnja, uz sljedeće izuzetke:

- ako je $D = 29$ i $E = 6$, Uskrs je 19. travnja (umjesto 26. travnja)
- ako je $D = 28$, $E = 6$ i $A > 10$, Uskrs je 18. travnja (umjesto 25. travnja).

U tablici ispod navedene su vrijednosti dobivene za prošlu, ovu i sljedeću godinu.

n	2018.	2019.	2020.
A	4	5	6
B	2	3	0
C	2	3	4
$19A + X$	100	119	138
D	10	29	18
$2B + 4C + 6D + Y$	77	197	124
E	0	1	3
$22 + D + E$	32	52	43
datum Uskrsa	1. travnja	21. travnja	12. travnja

Objašnjenje algoritma

Čitatelj sigurno pogađa da B ima veze s prijestupnim godinama, C i E s brojem dana u tjednu, a D s brojem dana u mjesecu. Na prvi pogled je najčudniji broj 19 koji se pojavljuje u definiciji broja A, no nije teško objasniti o čemu se radi.

Lunarni mjesec od mlađaka do mlađaka prosječno traje približno $29,5306$ dana, što znači da 12 lunarnih mjeseci ima oko $354,3672$ dana, oko 11 dana manje od kalendarske godine. To znači da se datumi mjesečevih mijena svake godine pomiču za 11 dana unatrag. Preciznije, godina prema prilično točnom gregorijanskom kalendaru, u kojem je od 400 godina 97 prijestupnih, prosječno traje

$$\frac{303 \cdot 365 + 97 \cdot 366}{400} = 365,2425 \text{ dana.}$$

Broj 19 pojavljuje se kao period nakon kojeg se odnos kalendarskih datuma i mjesečevih mijena počinje ponavljati po istom obrascu. Naime, 19 solarnih godina (prosječno $6939,6075$ dana) podudara se sa 235 lunarnih mjeseci (oko $6939,7$ dana).

Sada je sve spremno za objašnjenje značenja brojeva od A do E:

- A osigurava ponavljanje istih datuma mjesečevih mijena svakih 19 godina
- B kontrolira radi li se o prijestupnoj godini
- C kontrolira klizanje datuma nedjelje
- D je broj dana od 21. ožujka do prvog sljedećeg punog mjeseca (najmanje 0, a najviše 29)
- E je broj dana od jednog dana nakon tog punog mjeseca do prve sljedeće nedjelje (najmanje 0, a najviše 6).

Potrebno je još pobliže objasniti formule za D i E. Formula za D ovisi o A, koji se svake godine, ako nije djeljiva sa 19, povećava za 1, pa se $19A + X$ povećava za 19. Kako se potom računa ostatak pri dijeljenju sa 30, povećanje za 19 ima isti efekt na D kao smanjenje za 11, a već je bilo napomenuto da se datumi mjesečevih mijena pomiču za 11 dana unatrag svake godine.

Primjer 1. Za prošlu godinu imali smo $D = 10$ (vidi tablicu), tj. puni mjesec je bio 31. ožujka. To znači da je 2019. puni mjesec 20. ožujka, no to je prije nominalne ravnodnevnice, pa uzimamo sljedeći puni mjesec, tj. dodamo 19 umjesto da oduzmemo 11 i dobijemo $D = 29$. Dakle, puni mjesec je 19. travnja ($21 + 29 = 50$, $50 - 31 = 19$). Za 2020. oduzimamo 11 i dobivamo 8. travnja.

Formula za E je nešto složenija, no krenimo redom. Kalendarska godina ima nepuna 52 tjedna, jer je $52 \cdot 7 = 364$, što znači da se datum nedjelje svake godine pomiče za 1 dan unatrag, odnosno za 2 dana ako je prijestupna godina. Uočimo da se B i C svake godine povećaju za 1, pa se $2B + 4C$ poveća za 6, što je s obzirom na uzimanje ostatka pri dijeljenju sa 7 isto što i smanjenje za 1 (drugim riječima, svejedno je kažemo li da se datum nedjelje pomiče za 1 dan unatrag ili za 6 dana unaprijed). Izuzetak su prijestupne godine kad je $B = 0$, a $4B$ postaje 0 umjesto 8, što osigurava pomak za još 1 dan unatrag (jer je 0 za 1 manje od 8 po ostatku pri dijeljenju sa 7). Korištenje $2B + 4C$ kako bi se bez razbijanja na slučajeve pokrile i prijestupne godine kao tipična gausovska dosjetka, predstavlja možda i najzanimljiviji moment u cijelom postupku.

Sada za trenutak zanemarimo D i pogledajmo na primjeru što znači broj $(2B + 4C + Y) \mod 7$.

Primjer 2. Za 2018. je $(2B+4C+Y) \mod 7 = 17 \mod 7 = 3$. Kako je Uskrs bio 1. travnja, znamo da je i 25. ožujka bila nedjelja. Kako je $22 + 3 = 25$, to $(2B + 4C + Y) \mod 7$ predstavlja broj dana do prve nedjelje nakon 22. ožujka. No, ako je to vrijedilo za 2018, vrijedi i za bilo koju drugu godinu jer smo upravo vidjeli da promjena B i C točno odražava pomak datuma nedjelje u kalendaru.

No, nas ne zanima ta nedjelja, nego prva nakon D dana poslije 22. ožujka. Ako uspoređujemo dvije nedjelje, broj dana od 22. ožujka do bilo koje od njih mora imati isti ostatak pri dijeljenju sa 7, tj.

$$D + E \equiv 2B + 4C + Y \mod 7.$$

Ako oduzmemo D od obje strane kongruencije, opet mora biti isti ostatak:

$$E \equiv 2B + 4C - D + Y \mod 7.$$

Sada smijemo dodati $7D$ desnoj strani jer je $7D$ djeljivo sa 7 i mora vrijediti

$$E \equiv 2B + 4C + 6D + Y \mod 7.$$

Kako je E po definiciji između 0 i 6, jasno je da kongruenciju možemo zamijeniti jednakošću

$$E = (2B + 4C + 6D + Y) \mod 7.$$

Stoljetne konstante

Brojevi X i Y u julijanskom su kalendaru nepromjenjivi, a u gregorijanskom se mijenjaju samo svakih najmanje 100 godina. Čitatelj odmah pogađa da to ima veze s gregorijanskom korekcijom po kojoj godine djeljive sa 100 nisu prijestupne, osim onih djeljivih sa 400. Upravo to je razlog što se Y 2100. povećava za 1. Naime, time se poništava tretiranje 2100. kao prijestupne godine u formuli za E. Jasno je i da tako korigirani Y treba zadržati i sljedećih 99 godina, jer se klizanje nedjelje u kalendaru odvija dalje po istim pravilima kao ranije.

Manje je poznato da postoji gregorijanska korekcija i u lunarnom kalendaru, zbog koje se u posljednjoj godini nekih stoljeća mijenja i X. Jasno je ipak da je takva korekcija potrebna jer se 19 godina ne podudara sasvim točno sa 235 lunarnih mjeseci pa se akumulirana pogreška korigira na sličan način kako se to čini s prijestupnim godinama. Da ovaj tekst ne naraste previše, završavam napomenom da zainteresirani čitatelji detalje o lunarnoj korekciji mogu pronaći na internetskim stranicama (vidi [1] i [3]), a isto se odnosi i na objašnjenja gore spomenutih izuzetaka zbog kojih Uskrs nikada ne može biti 26. travnja, a u drugoj polovici ciklusa od 19 godina niti 25. travnja, nego se u slučaju ovih kasnih datuma pomiče tjedan ranije.

LITERATURA

1/ D. Madore: *The calendar*, `http://www.madore.org/david/misc/calendar.html` (pristupljeno: 10. 1. 2019.)

2/ T. Pratchett (2003.): *The Wee Free Men*, Doubleday.

3/ H. Reints: *Easter date algorithms*, `http://www.henk-reints.nl/easter/` (pristupljeno: 10. 1. 2019.)

4/ S. Sruk (2018.): Gaussov algoritam za određivanje datuma Uskrsa, *Matematika i škola 94*, str. 183–185.