Matematički tepisi

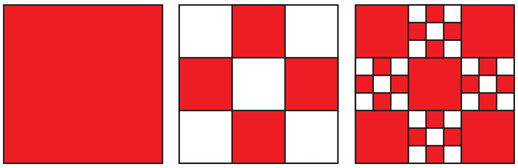
Branimir Dakić, Zagreb

U svakom učenju, pa tako i učenju matematike, motivacija je jedan od vrlo bitnih čimbenika i pretpostavki uspjeha. Čime je pobuditi? Kako je postići? Odgovori na ovakva pitanja ovise prije svega o uzrastu učenika. Na nižim uzrastima motivaciji će pridonijeti razni zorni postupci među koje bi se moglo uvrstiti i svakojake zagonetke. Treba pritom voditi računa o smislu i cilju zadataka koji se postavljaju i rješavaju. U ovom članku pod naslovom "Matematički tepisi" objedinit ćemo nekoliko malih tema koje su pogodne za razne prigode.

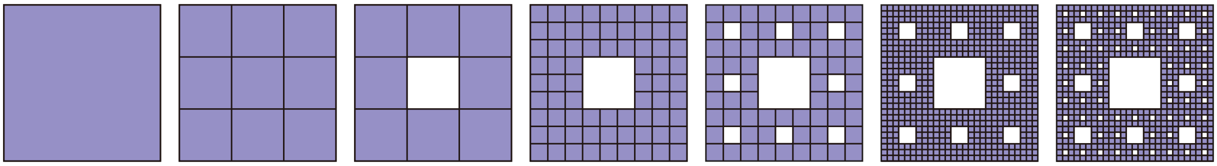
U više matematičkih sadržaja naći ćemo spominjanje pojma *tepih*. Ako ga shvatimo doslovno, onda ćemo svakako pomisliti na tepihe koji su izrađeni prema motivima ili su djelo M. C. Eschera, Victora Vasarelyja i Eugena Josta. Ove umjetnike matematičari često svojataju već zbog samog doživljaja koji se nameće promatranjem njihovih djela. Dakako, ima i drugih primjera pa učenike možemo poticati da ih pokušaju pronaći te uočiti njihovu poveznicu s matematikom.

Upiše li se pojam *"matematički tepisi"* u internetsku tražilicu, pri vrhu ponuda izdvaja se odgovor tepih Sierpińskoga. Riječ je o povijesno značajnoj pojavi fraktala, danas vrlo raširenih u raznim primjenama. Na sličicama na dnu stranice vidimo prvih nekoliko uzastopnih ponavljanja istog postupka (iteracije) kojim se gradi tepih Sierpińskoga. Godine 1916. poljski matematičar Wacław Franciszek Sierpiński stvorio je ovaj fraktal pa je u prigodi obilježavanja 100. obljetnice njegove pojave pokrenut projekt u kojem je sudjelovalo 32 000 učenika iz cijelog svijeta. Završnica projekta dogodila se 13. svibnja 2016. u Almeriji u Španjolskoj i na tom događaju sedma iteracija fraktala složena je u kvadrat sa stranicom duljine 43.7 metara (uvodna fotografija). Dodajmo kako je u ovom projektu sudjelovalo i pet hrvatskih osnovnih škola: dvije iz Metkovića te po jedna iz Rovinja, Zadra i Zagreba.

Sličan fraktal konstruirao je Jeff Haferman i po njemu je dobio ime *Hafermanov tepih*.



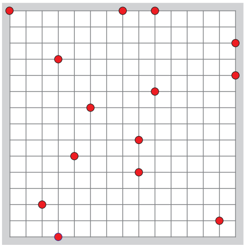
Više je *puzzla* na neki način vezano uz matematičke sadržaje, pa i tepihe. Navest ćemo dva. Prvi je vezan uz običaj koji gaje Armenci, a riječ je o prekrivanju podova s više tepiha. Odatle vjerojatno i potječe naziv problema – Armenski tepisi. O čemu



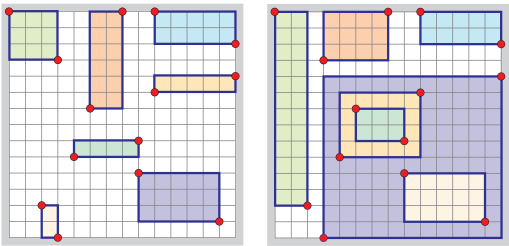
Branimir Dakić, prof., Zagreb, `dakicb@gmail.com`

se radi? Zadana je pravokutna mreža i istaknut je neki broj točaka – sjecišta pravaca mreže. U mreži treba razmjestiti niz pravokutnika (tepiha) uz neke zadane uvjete. Pogledajmo primjer.

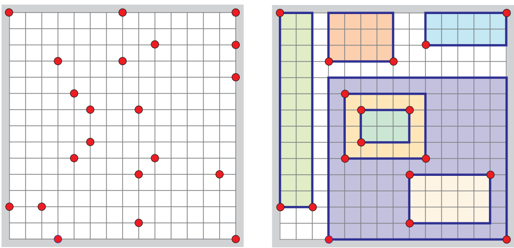
Na sljedećoj slici uočavamo mrežu sa 14 istaknutih točaka. Treba ucrtati pravokutnike tako da po dvije od tih točaka budu suprotni vrhovi nekog pravokutnika. Pritom moraju biti zauzete sve točke, a nikoja točka ne može biti vrhom više od jednog pravokutnika. Pravokutnici se mogu i međusobno i preklapati.

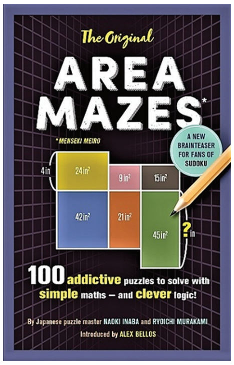


Prikazana su dva rješenja tog zadatka. Pokušajte pronaći još koje.

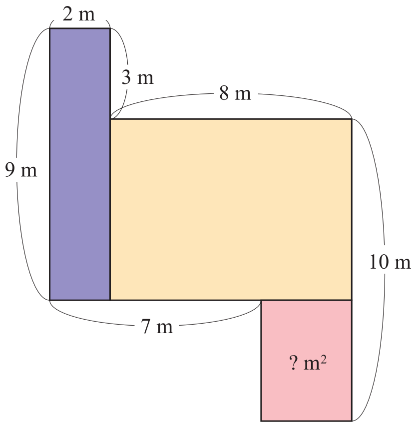


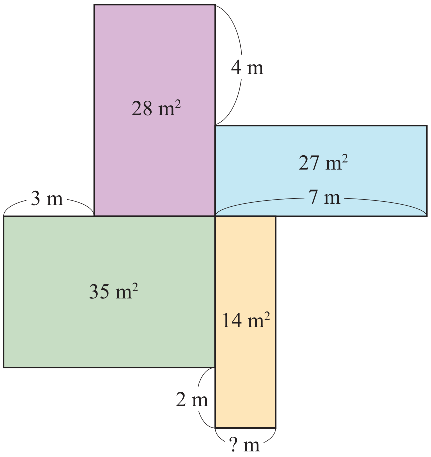
Na idućoj slici zadatak je pak posložiti tepihe tako da su po tri od zadanih točaka vrhovi tepiha. Navedeno je i jedno rješenje zadatka.





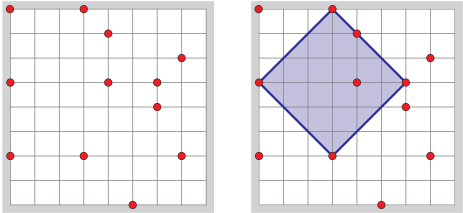
Još jedan problem s tepisima djelo je Japanca Naoki Inabe. Zadatak je vrlo jasan. Zada se slog od nekoliko pravokutnika (tepiha) i naznačeni su neki podatci za duljine nekih njihovih elemenata ili su pak navedene površine nekih pravokutnika. Treba izvesti rezultat i upisati ga umjesto upitnika. Jednostavan primjer imamo na naslovnici jedne od brojnih Inabinih knjiga. Za rješenje zadatka dovoljno je znati izraz za izračun površine pravokutnika. Dodajmo još dva zadataka, a mnoštvo ih se može naći na internetu.



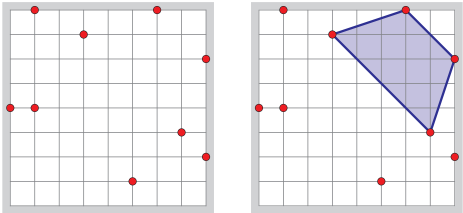


Naoki Inaba autor je i jedne zgodne didaktičke igrice koja je prikladna za uvježbavanje prepoznavanja geometrijskih likova, ali i za primjenu poučaka o sukladnosti. Zada se više točaka koje su čvorišta neke kvadratne mreže te se postavi zahtjev da se u mrežu smjesti neki lik čiji su svi vrhovi u tim čvorištima. Navedimo dva primjera.

Neka je zadan određen broj točaka u kvadratnoj mreži kao na donjoj slici lijevo. Odaberite četiri od tih točaka tako da budu vrhovi kvadrata. Na slici desno vidimo rješenje.



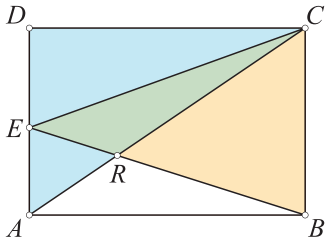
Još jedan zadatak traži da se u mrežu na opisani način ucrta trapez.



U nastavku će biti riječi o teoremu koji je poznat kao **poučak o tepisima**. Poučak se pojavljuje u nekoliko inačica, a ovdje je naveden u obliku koji glasi:

Položimo dva tepiha na pod u prostoriji. Površina u kojoj se tepisi preklapaju jednaka je površini dijela poda koji je ostao nepokriven ako i samo ako je ukupna površina tepiha jednaka površini poda. Pritom je nebitan oblik poda kao i oblik tepiha.

Objasnimo smisao poučka na sljedećem primjeru. Neka su u prostoriji s pravokutnim podom dana dva trokutasta tepiha, tepih ACD i tepih BCE te neka su smještena kao na danoj slici.

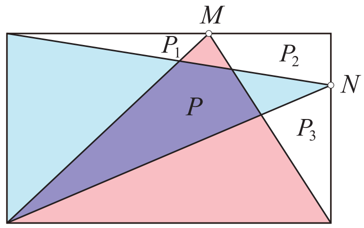


Tepisi ACD i BCE imaju jednake površine (po pola površine pravokutnika), a njihov je zbroj jednak površini pravokutnika $ABCD$. Preklapaju se u trokutu ERC, dok je ABR potpuno nepokriven. Prema poučku je tada površina trokuta ABR jednaka površini trokuta ERC. No, tu je činjenicu i inače lako dokazati. Naime, iz dviju jednakih površina $P(ACE) = P(ARE) + P(RCE)$ i $P(ABE) = P(ARE) + P(ABR)$ slijedi $P(RCE) = P(ABR)$. Primijetimo kako je ovo poznato svojstvo trapeza.

Budući da je $P(ABC) = P(BCE)$, iz iste slike slijedi da je $P(BCR) = P(ARE) + P(ECD)$. Obrazložite.

Uz opisane jednakosti izradite u GeoGebri dinamički programčić te pomičući točku E pratite promjene površina te točnost ovih jednakosti.

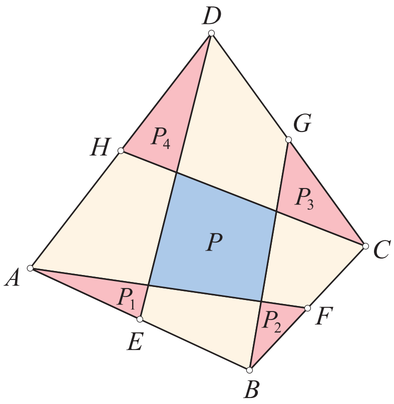
Evo još jednog zadatka. Dva tepiha, dva trokuta jednakih površina čiji je zbroj jednak površini pravokutnika (zašto?) preklapaju se u četverokutu površine P. Pritom ostaju nepokriveni dijelovi pravokutnika čije su površine P_1, P_2 i P_3. Pokazuje se da je $P_1 + P_2 + P_3 = P$ bez obzira na položaj točaka M i N na stranicama pravokutnika.



I u ovom zadatku možemo se poigrati izradom odgovarajućeg dinamičkog programčića.

Još jedan zadatak na istu temu uvjerit će nas u učinkovitost poučka o tepisima.

Dan je četverokut $ABCD$. Točke E, F, G i H polovišta su stranica tog četverokuta. Spojimo vrhove i polovišta stranica te tako razrežemo četverokut na devet dijelova. Pokazuje se kako za površine istaknutih dijelova vrijedi $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P$.



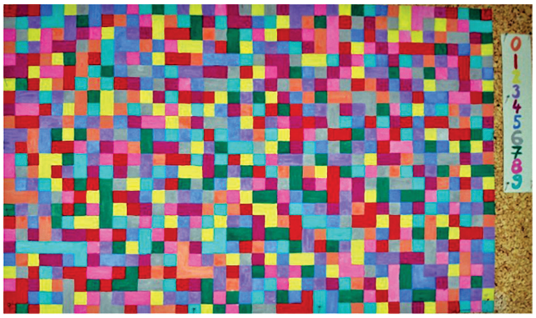
Promatranjem slike uočit ćemo kako se tepih $AFCH$ preklapa se s tepihom $EBGD$, a trokuti pri vrhovima su četverokuta nepokriveni. Prema spomenutom poučku bilo bi $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = P$.

Preostaje nam još samo provjeriti da je zbroj površina tepiha $AFCH$ i $EBGD$ jednak površini četverokuta $ABCD$. U tu svrhu dokažimo da je površina svakog od dvaju tepiha jednaka polovini površine četverokuta $ABCD$.

Zbrojimo li dvije jednakosti, jednakost $P(ACH) = \frac{1}{2}P(ACD)$ i jednakost $P(CAF) = \frac{1}{2}P(CAB)$, dobit ćemo $P(AFCH) = \frac{1}{2}P(ABCD)$. Analogno se pokazuje $P(BGDE) = \frac{1}{2}P(ABCD)$. Time je dokazana i naprijed navedena tvrdnja.

Prisjetimo se sada jednog od najljepših matematičkih tepiha, ***teπha***. Svakoj od 10 decimalnih znamenaka pridružimo neku boju. Nižemo zatim znamenke broja π, ali tako da umjesto pojedine znamenke nacrtamo kvadratić u boji koja je toj znamenci pridružena. Kako to izgleda, vidimo na slici koja predočuje ovaj popularni broj s njegovih 1000 decimala.

Zašto ne bismo primijenili ideju ove lijepe predodžbe broja π i na druge realne brojeve, racionalne i iracionalne? Proveli smo to na nekoliko



primjera u našem Panoptikumu. No, ostanemo li samo na tome, cijela priča ne bi imala puno smisla. Prije svega, valja uočiti kako se kod nekih zapisa niz od nekoliko boja uzastopce ponavlja, što je znak da se radi o beskonačno periodičkim racionalnim brojevima. Iskoristimo za raspravu prigovor kako ne možemo znati što se događa s nekim brojevima nakon "ispisanih" njegovih 100 decimala. Možda se radi o decimalnom broju s konačnim brojem decimala? Ili se decimale nakon neke pozicije nastavljaju nizati bez ikakva reda?

Slijede pitanja: Kako razlikujemo prikaze racionalnih i iracionalnih brojeva? Kako izgleda slika "konačnog" decimalnog broja, a kako broja s beskonačno mnogo decimala? Je li točno da nizanje decimala iracionalnih brojeva ne pokazuje bilo kakvu pravilnost?

Zbog toga istaknimo pretpostavku kako decimale nekog broja nakon nanizanih 100 znamenaka prate uzorak koji smo uočili promatranjem slikovne predodžbe tog broja.

Napomenimo kako se u svakom našem pojedinom primjeru promatra samo decimalni dio broja, a cijeli je dio nula.

LITERATURA

1/ `http://mathpickle.com/project/armenian-rug-puzzles-logic/`

2/ `http://mathpickle.com/wp-content/uploads/2016/07/Armenian-Rug-Puzzles.pdf`

3/ `https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/CarpetsInSquare.shtml`

4/ `https://wordplay.blogs.nytimes.com/2015/08/17/naoki-2/`

5/ `https://www.janko.at/Raetsel/Naoki/index.htm`