

Boje u fraktalima

Mateja Jurjako, Cres

Što su fraktali, čemu služe i kako nam boje pomažu u njihovom razumijevanju saznali su učenici Osnovne škole Frane Petrića u Cresu kroz školski projekt kojim smo obilježili tjedan Festivala znanosti. Kroz različite aktivnosti učenicima sam nastojala približiti fraktale na razini koja im može biti bliska.

Motivacija kao ključ uspjeha

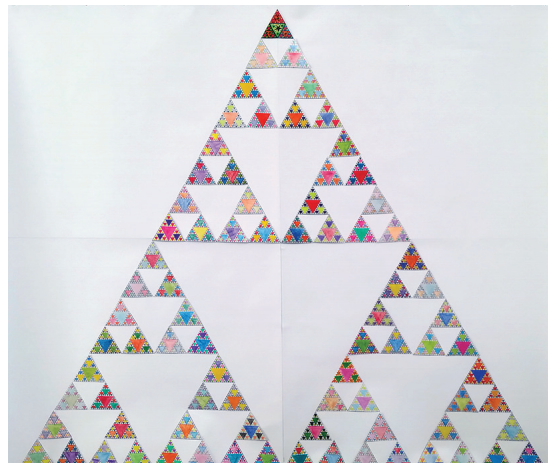
Fraktalnu avanturu započeli smo nakon što sam od svoje učenice sedmašice saznala kako ju zanimaju fraktali te je o njima već mnogo saznala. Posebno ju je očarala beskonačnost Mandelbrotova skupa i njegove boje. Njezina motivacija bila je dovoljan razlog da i ja detaljnije istražim ovo područje te da i druge učenike uključimo u priču o fraktalima.

Pregršt aktivnosti

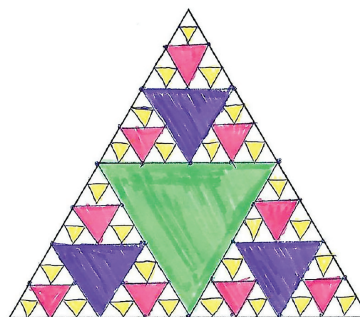
Proučavajući fraktale, počele su navirati različite aktivnosti kojima ih možemo približiti učenicima osnovne škole. Dio tih aktivnosti detaljnije smo osmislili i provele kroz nekoliko manjih radionica, a potom objedinile u prezentaciji i izložbi kojima smo dali doprinos Festivalu znanosti u našem malom Cresu, a potom i gradu Rijeci u sklopu aktivnosti *Škole za škole*.

Trokut Sierpinskog

U ovu sam aktivnost uključila sve učenike od 5. do 8. razreda. Na satu matematike svaki je učenik prema detaljnim uputama izradio jedan trokut Sierpinskog



skog duljine stranice 10 cm. Učenici su određivali polovišta stranica koja tvore novi trokut koji su obojili. Ponavljali su postupak s novonastalim trokutima do četvrtog koraka (iteracije), pri čemu su sve trokute iste razine bojili jednom bojom.



Plastificirali smo ih, izrezali i od njih izradili veliki trokut Sierpinskog koji je odmah izmamio znatiželjne poglede, a ubuduće će krasiti školski hodnik.

Prilikom crtanja učenici su zaključili da se proces može ponavljati beskonačno mnogo puta i da se broj novonastalih trokuta u svakom koraku povećava 3 puta. U 8. razredu to smo povezali s

potenciranjem pa su učenici vrlo jednostavno mogli izračunati da bi u 10. koraku bilo $3^{10} = 59\,049$ trokuta.

Dok smo preslagivali trokutiće, nametnuli su se sljedeći zadatci koje je trebalo riješiti:

1. Učenici su izradili 114 trokuta duljine stranice 10 cm. Od njih želimo složiti veliki trokut Sierpinskog. Koji je najveći mogući takav trokut i kolika je duljina njegove stranice?

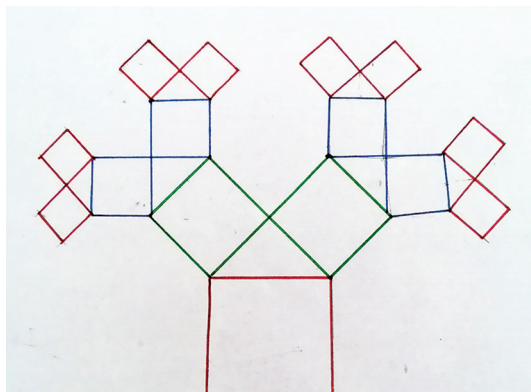
Učenici su zaključili da se broj potrebnih trokutića u svakom koraku povećava 3 puta, što znači da možemo iskoristiti $3^4 = 81$ trokutića ($3^5 > 114$). Duljina stranice pak ovisi o broju trokutića uz jednu stranicu čiji se broj u svakom koraku povećava 2 puta pa će ih biti $2^4 = 16$. Ukupna je duljina $16 \cdot 10 \text{ cm} = 1.6 \text{ m}$.

2. Možemo li preostale trokutiće iskoristiti za izradu novih trokuta?
3. Pretpostavimo da su svi učenici za bojenje svakog od 4 koraka koristili 4 boje (žutu, crvenu, plavu i zelenu). Koliko su različitih trokuta mogli obojiti ako se boje:
a) ne smiju ponavljati b) smiju ponavljati?
4. Uočeno je da su učenici birali 4 boje između 9 različitih boja. Koliko različitih trokuta tada mogu obojiti u oba slučaja?

Zadatci se mogu još dalje preoblikovati, npr. odrediti kako bismo riješili 1. i 2. zadatak pod uvjetom da imamo na raspolaganju svih 3024 trokuta koji se mogu obojiti birajući 4 boje od 9 ponuđenih bez ponavljanja. Kolika je vjerojatnost da dva učenika imaju identično obojene trokute? Itd.

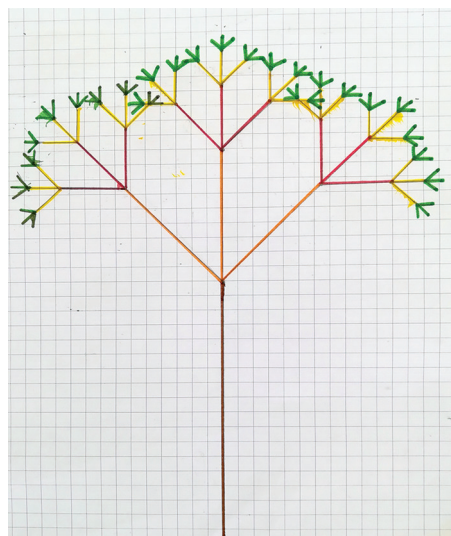
Pitagorina stabla

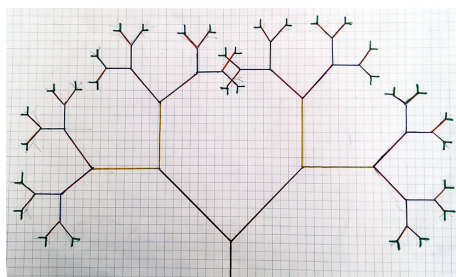
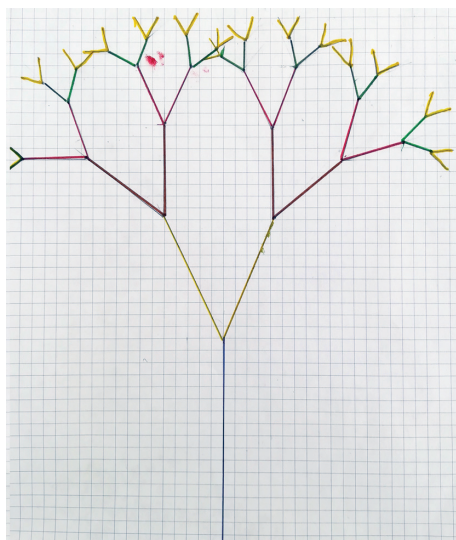
Učenici 8.a razreda su u prvom polugodištu konstruirali Pitagorina stabla. Za ovaj projekt prilagodili su svoje radove tako da su različitim bojama obojili svaku razinu u procesu nastajanja stabla. Na taj su način lako odredili da bi u 10. koraku bilo $2^{10} = 1024$ malenih kvadratića (ako prvi kvadrat označimo kao nulti korak, 2^0).



Fraktalne grančice

Aktivnost je provedena sa skupinom učenika šestih razreda. Učenicima smo prezentirali primjere biljaka iz okoline kod kojih se u rastu uočava fraktalna struktura, poput lišća, grančica, brokule, cvjetače. Najviše ih je motivirala činjenica da se u računalnoj grafici, igricama i 3D filmovima koriste algoritmi bazirani na fraktalima za generiranje realističnih pejzaža i raslinja. Potom su crtali grančice po zadanom pravilu pazeći da u novom koraku budu očuvani kutovi i omjeri (duljina nove grančice je dva puta kraća ili za trećinu kraća). Različitim bojama su obojili svaku razinu.

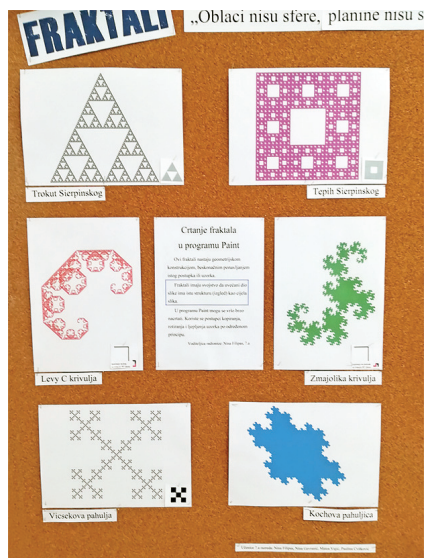




Crtanje klasičnih fraktala u programu Paint

Sedmašica Nina bila je voditeljica radionice za skupinu učenika sedmog razreda. Upoznala ih je s klasičnim fraktalima te ih je naučila kako ih mogu brzo crtati u nekom programu za crtanje. Odabrala je Paint koji je učenicima blizak. Moram napomenuti da je sama osmislila i provela aktivnost, a ja sam od nje također naučila. Postupak crtanja temelji se na kopiranju malenog početnog uzorka po zadanom pravilu, nakon čega se isti postupak primjenjuje na rezultat sve dok ne dobijemo sliku željene veličine.

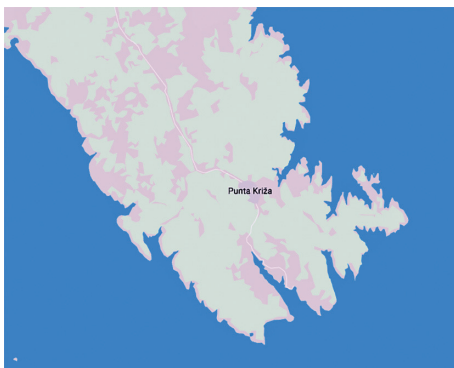
Nastali su lijepi radovi: trokut Sierpinskog, tepih Sierpinskog, Levy C krivulja, zmajolika krivulja, Vicsekova pahuljica i Kochova pahuljica.



Fraktali u prirodi

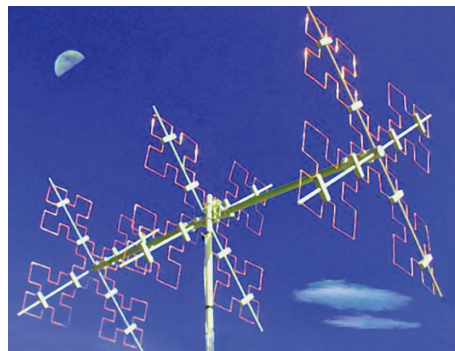
Učenici su prikupljali i fotografirali fraktalne oblike u svojoj okolini: stabla, granje, lišće, plodove (šišarke, cvjetaču...). Nina je upoznala učenike s još nekim primjerima motivirajući ih citatom matematičara B. Mandelbrota: *Oblaci nisu sfere, planine nisu stošci, obale nisu kružnice, a munja ne putuje po pravcu*. Naši organi, poput pluća, mozga ili krvožilnog sustava, također su fraktalni. U studiji krajobraza otoka Cresa iz 2015. godine naišli smo na zanimljiv podatak koji nas je potaknuo da na karti promotrimo južni dio otoka: *Gotovo fraktalna dimenzija razvedenosti ogleda se kroz brojne duboko usječene uvale*.





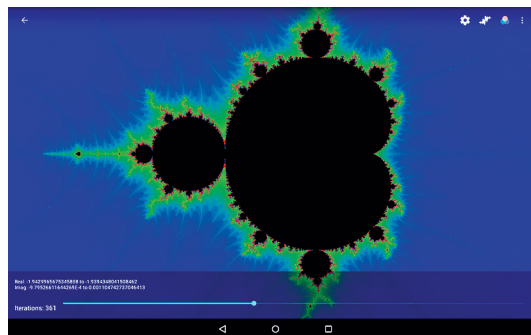
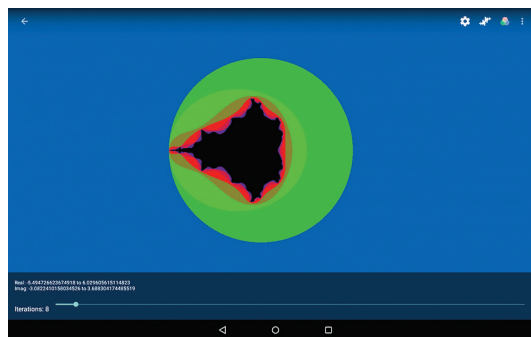
Primjene fraktala

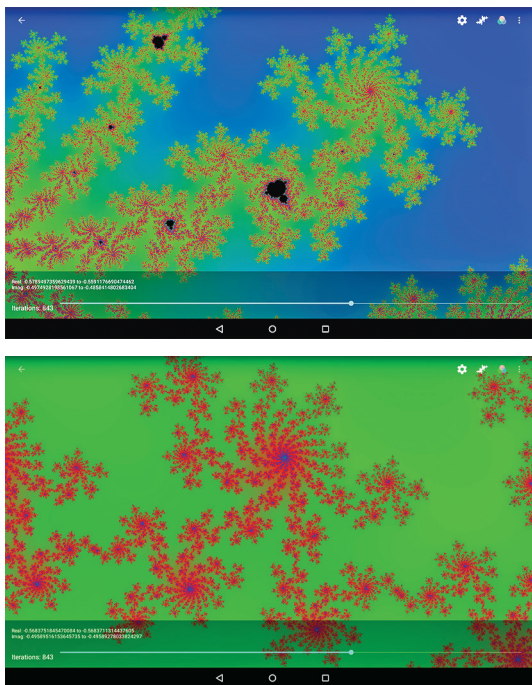
U svojoj prezentaciji učenica Nina izložila je gdje sve koristimo fraktale i fraktalnu geometriju koju je uveo poljski matematičar Benoit Mandelbrot. Primjene su nebrojene: u fizici, medicini, geologiji, astronomiji, meteorologiji, tehnologiji, proizvodnji, ekonomiji, računalnoj grafici, komunikacijama, arhitekturi, umjetnosti, psihologiji i dr. Trebalo je odabrati neka područja koja možemo približiti učenicima. To je svakako računalna grafika o kojoj je prethodno bilo riječi i mjerenje duljine obale. Zanimljive su bile fraktalne antene koje koriste i mobilni. Učenica je objasnila kako su znanstvenici otkrili da fraktalni dizajn antena omogućava primanje i odašiljanje različitih signala kako bi mobilni mogao komunicirati s različitim uređajima.



Mandelbrotov skup

Učenici su na tabletima s pomoću aplikacije Mandelbrot Explorer upoznali najpoznatiji fraktal, Mandelbrotov skup. Nina je učenicima pokušala na njima razumljiv način približiti ovaj skup. Objasnila je da je Mandelbrotov skup prikazan crnom bojom, a najzanimljiviji je na granici gdje beskonačnim uvećavanjem možemo uočiti sve više detalja u kojima se iznova pojavljuju isti oblici. Znanja





Nove ideje

Uz prezentaciju i izložbu radova za kraj smo na novom školskom 3D-printeru izradili fraktalni privjesak te provjerili znanje učenika kroz Kahoot kviz. Realizacija ovoga projekta otvorila je još novih ideja i mogućnost korelacije s drugim predmetima poput biologije, fizike i geografije. Nadam se da ćemo narednim projektima i to ostvariti.



koja stoje iza ovog skupa matematičarima su bila otprije poznata, ali tek je razvoj računala omogućio njegovo predočavanje zbog izvođenja velikog broja računskih radnji i mogućnosti generiranja boja s pomoću algoritma. Njegove složene strukture nastaju s pomoću jedne malene formule. Kao što smo pri izradi trokuta Sierpinskog ponavljali isti postupak crtanja u svakom novom koraku, tako i formula kojom je zadan ovaj skup ponavlja računanje s rezultatom prethodnog računa. To nazivamo iteracija, a aplikacija omogućava praćenje procesa kroz te iteracije. Prikazi u različitim bojama koji su se pojavljivali izazivali su oduševljenje.

Ova je aktivnost učenicima bila posebno zanimljiva pa su aplikaciju željeli instalirati i na svojim mobilnim. Možda jednoga dana, kada budu imali više matematičkog znanja, odluče detaljnije istražiti formulu

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

koja za kompleksni broj c i početnu vrijednost $z_0 = 0$ provjerava ostaje li apsolutna vrijednost broja z_n ograničena koliko god da povećavamo broj iteracija n .

