Winplotom
do kopita

Više nego

Ela Rac Marinić Kragić *Zagreb*

Čitajući knjigu Nevena Elezovića *Matematička natjecanja i rad s darovitim učenicima* (u izdanju Elementa) naišla sam na cijelo brdo interesantnih zadataka. Neke od njih sam pokušala riješiti.

Među ostalima zainteresirao me jedan lagani zadatak:

Komad drveta u obliku uspravnog valjka ima duljinu promjera 12 cm. Iz drveta je isječena cjepanica s dvama ravninskim presjecima koji prolaze kroz cijeli komad. Prva ravnina presjeka okomita je na os valjka, a druga ravnina presjeka s prvom ravninom zatvara kut od 45°. Presjek obiju ravnina i valjka je točno jedna točka. Volumen cjepanice može se izraziti s $n\pi$, gdje je n prirodan broj. Izračunaj n.

Zadatak je bio postavljen na američkom AIME natjecanju. Više o tom natjecanju možete pročitati u spomenutoj knjizi ili pronaći na stranicama Interneta.

Zadatak je okupirao moju pažnju. Ne zbog jednostavnosti rješavanja, već zbog pitanja koja takav naoko lagan zadatak može otvoriti:

što sve možemo dobiti presijecanjem uspravnog valjka ravninama pod različitim kutovima; kako učeniku zorno predočiti takve presjeke; kako izračunati volumene tijela nastalih takvim presjecima?

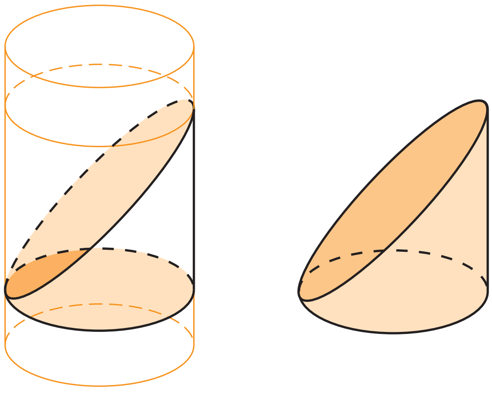
Ova pitanja otvaraju široko polje mogućnosti nastavniku matematike.

Stvar se dodatno komplicira ako u razmatranje uzmemo kosi valjak. Bojim se da neke od tih problema ne možemo nikako riješiti uz pomoć srednjoškolske matematike. Što ako nam učenik ipak postavi pitanja? Hoće li ga zadovoljiti lakonski odgovor da se time ne opterećuje i da će o tome učiti na kolegijima više matematike na fakultetu?

Pogledajmo zadatak koji mi je zagolicao maštu. Što će nastati presijecanjem valjka ravninom koja zatvara kut od 45° s ravninom okomitom na os valjka? To smo mogli formulirati i ovako – ravnina zatvara kut od 45° s osi valjka. Naravno, u presjeku nastaje elipsa velike osi $2r\sqrt{2}$ i male osi $2r$. Učeniku ta stvar možda nije intuitivno jasna. Ako nemamo model valjka s potrebnim presjecima, problem predočavanja ipak možemo riješiti. Ponesimo u školu staklenu ili plastičnu čašu u obliku valjka (poželjno je da bude visoka), napunimo je do određene visine vodom i nagnimo pod kutom od 45°. Eto nam pred očima traženog presjeka.

Stvar naravno možemo nacrtati i nekim od programa na računalu. No bolje je pribjegavati prvoj metodi. Računalo treba početi koristiti onog trenutka kada nam svi raspoloživi modeli i stvari iz realnog života ne mogu nikako riješiti problem zornog prikaza.

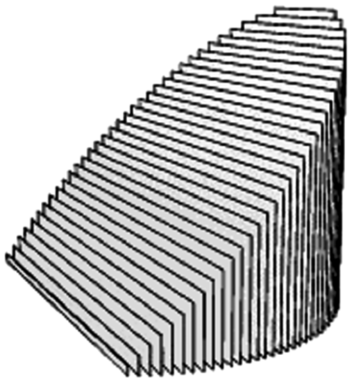
Skica izgleda ovako:



Volumen cjepanice jednak je volumenu polovine valjka visine $2r$, promjera baze $2r$, dakle, $V = \frac{1}{2}r^2\pi \cdot 2r = r^3\pi = 216\pi$ cm^3, n je 216.

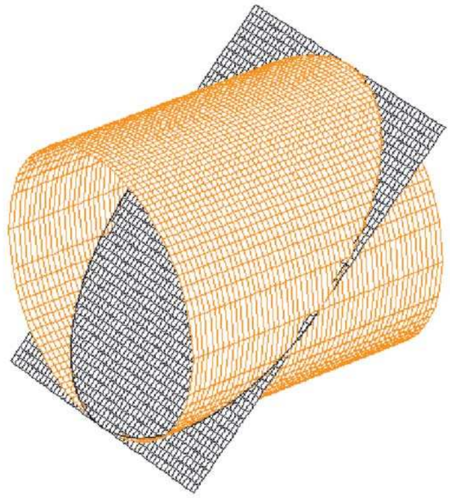
Slično tijelo nastalo presjekom valjka ravninom koja zahvaća dio osnovice nazivamo valjkastim klinom (kajlom) ili **kopitom**. Više o kopitu i izračunavanju njegovog volumena možete naći na `http://mathworld.wolfram.com/CylindricalWedge.html`.

Otuda sam i preuzela ovu sliku:

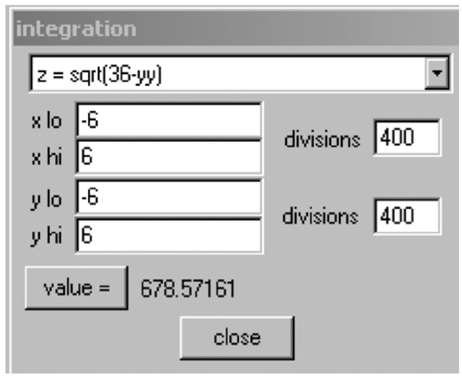


Volumen kopita koje bi nastalo presijecanjem ravninom kroz promjer osnovice pod kutom od 45° na osnovicu prema poznatim formulama (izvod možete naći na spomenutoj web stranici) iznosi $\frac{2}{3}r^3$ (ili 144 kod stošca polumjera osnovice 6).

Vratimo se zadatku. Nije loše nacrtati valjak u Winplotu i presjeći ga ravninom pod kutom od 45° u odnosu na os valjka. Winplot ima mogućnosti crtanja presjeka dviju ploha ili plohe i krivulje ako su one zadane u eksplicitnom ili implicitnom obliku. Slika će najbolje izgledati ako su plohe ili krivulje zadane u eksplicitnom obliku. Zato sam plašt valjka prikazala pomoću dviju jednadžbi, $z = \sqrt{36 - y^2}$ (gornja polovina) i $z = -\sqrt{36 - y^2}$ (donja polovina), dok je ravnina presjeka dana jednadžbom $z = -x$. Slika dosta zorno prikazuje presjek ravnine i valjka.



Winplot je interesantan za matematičare jer može integrirati. Pogledajmo:



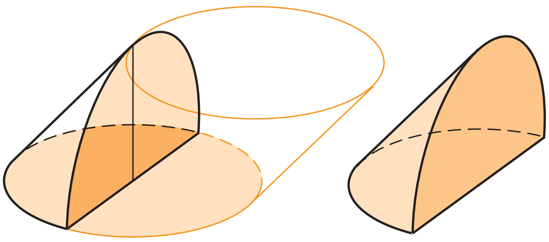
Ovo je približno volumen gornje polovine valjka, koji je jednak i volumenu tražene cjepanice. Volumen će biti precizniji ako povećavamo broj koji unosimo u *divisions*, ali će biti i sporije izračunat. Integriranje nam može pomoći u izračunavanju volumena onih tijela koja se teško računaju metodama srednjoškolske matematike. Međutim, ovdje moramo biti jako oprezni. Naime, Winplotom možemo točno izračunati samo volumen ispod one plohe čije sve točke imaju samo pozitivne (odnosno negativne) aplikate. On izračunava integral funkcije $f(x, y)$ nad pravokutnim područjem $-6 < x < 6$, $-6 < y < 6$.

Winplot može računati samo volumen tijela čija je ploha zadana u eksplicitnom obliku i koja je čitava smještena iznad (odnosno ispod) xy ravnine.

Prethodni zadatak ponukao me na razmišljanje o jednom složenijem problemu:

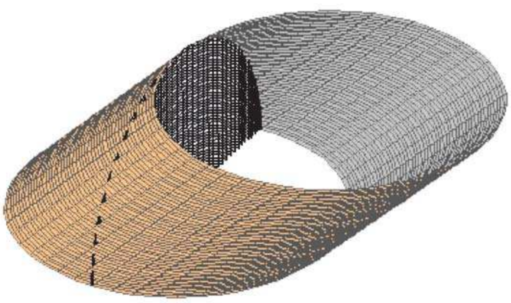
Komad drveta oblika kosog valjka čije izvodnice zatvaraju kut od 45° s osnovicom ima duljinu promjera 12 cm i visinu 6 cm. Iz drveta je isječena cjepanica tako da je ravnina presjeka okomita na osnovicu, a s osi valjka zatvara kut od 45° i prolazi središtem osnovice. Izračunaj volumen cjepanice tj. manjeg dijela drveta koji nastaje presjekom!

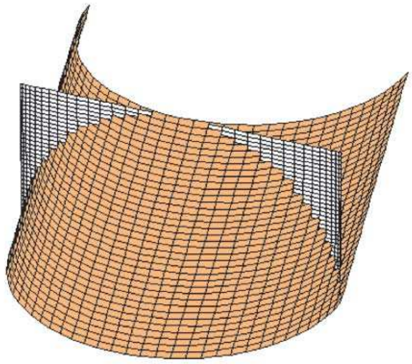
Skica izgleda ovako:



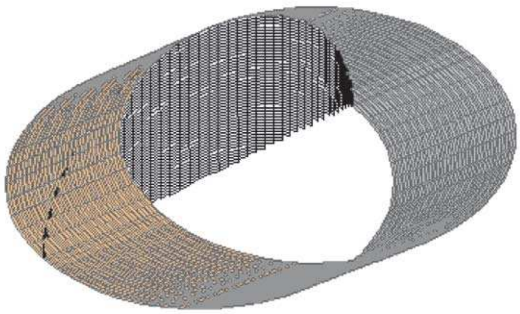
Što je presjek valjka i ravnine? Da se radi o stošcu, bio bi trokut. Kada se radi o kosom valjku, presjek može biti jedino ili dio elipse ili kruga. U ovom slučaju radi se o polukrugu radijusa r. Cjepanica koja je tako nastala omeđena je dvama polukrugovima i dijelom plašta valjka.

Ukoliko nemamo gotov model kosog valjka presječenog na spomenuti način, teško je pronaći model koji bi zadovoljavao uvjete zadatka. Zato sam pokušala nacrtati model računalom. U Winplotu on izgleda ovako:

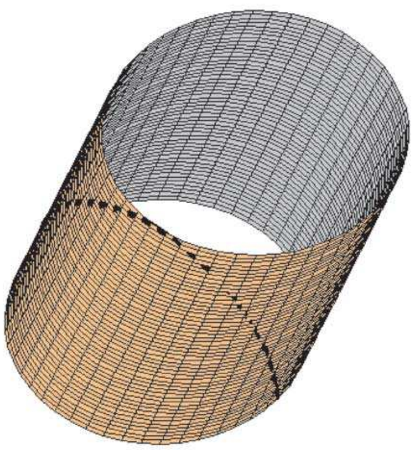




Winplot je prikladan kada modele želimo rotirati. To se postiže vrlo jednostavno, povlačenjem strelica! Tako isprobavamo najbolju poziciju. Na primjer:



ili



Koliko god sam se mučila izračunati volumen takve cjepanice metodama srednjoškolske matematike, svi su pokušaji neslavno završili.

Jedino je preostalo naći jednadžbu plohe — plašta kosog valjka pa izračunati volumen primjenom integralnog računa.

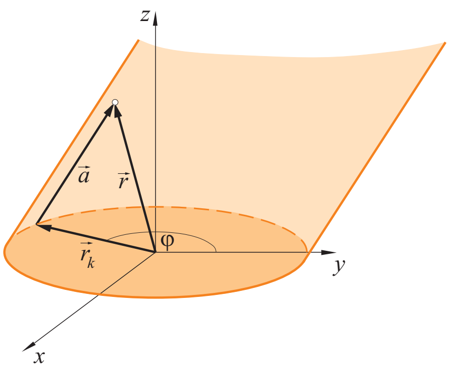
Do plohe se može doći na dva načina:

1. Ovo je cilindrična ploha koja nastaje kada pravac koji je paralelan, npr., vektoru $\vec{a} = 6\vec{j} + 6\vec{k}$ translatorno putuje po kružnici $x^2 + y^2 = 36$, $z = 0$. Jednadžba pravca u parametarskom obliku bit će $X = x + t \cdot 0$, $Y = y + t \cdot 6$, $Z = z + t \cdot 6$, gdje je (X, Y, Z) bilo koja točka na pravcu. Neka je $A(X, Y, Z)$ točka u kojoj taj pravac siječe kružnicu $x^2 + y^2 = 36$, $z = 0$ (rub osnovice valjka). Tada koordinate točke A zadovoljavaju sljedeće jednadžbe:

$$X = x + t \cdot 0, \quad Y = y + t \cdot 6, \quad Z = z + t \cdot 6,$$
$$X^2 + Y^2 = 36, \quad Z = 0.$$

Koristeći $Z = 0$ izrazimo parametar t iz treće jednadžbe $\left(t = \dfrac{-z}{6} \right)$ i uvrstimo u prve dvije. Dobit ćemo: $X = x$, $Y = y - z$. Ovako dobivene jednakosti uvrstimo u četvrtu jednadžbu i dobivamo jednadžbu plohe $x^2 + (y - z)^2 = 36$ u implicitnom obliku.

2. Jednadžbu plohe možemo odrediti i vektorskim putem (vidi skicu):



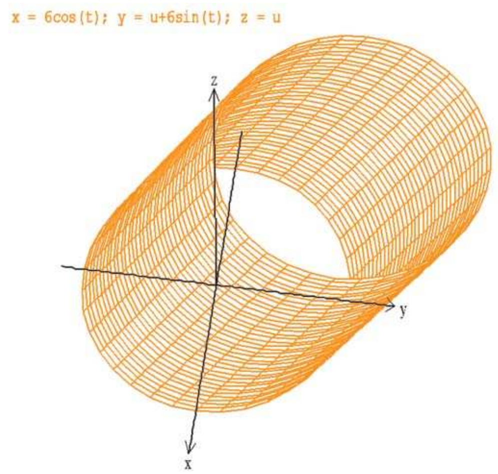
Neka je $\vec{r}$ radijvektor bilo koje točke na plaštu kosog stošca, $\vec{r}_k = 6(\cos\varphi \cdot \vec{\imath} + \sin\varphi \cdot \vec{\jmath})$ radij vektor točke koja pripada kružnici na osnovici stošca, a $\vec{a} = t(\vec{\jmath} + \vec{k})$ vektor u smjeru izvodnice kosog stošca. Tada je

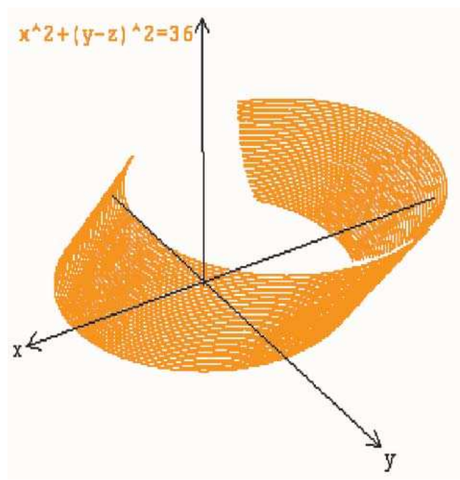
$$\vec{r} = \vec{r}_k + \vec{a} = 6(\cos\varphi \cdot \vec{\imath} + \sin\varphi \cdot \vec{\jmath}) + t(\vec{\jmath} + \vec{k})$$
$$= \vec{\imath} \cdot 6\cos\varphi + \vec{\jmath} \cdot (t + 6\sin\varphi) + \vec{k} \cdot t.$$

Dakle, vrijedi $x = 6\cos\varphi$, $y = t + 2\sin\varphi$, $z = t$, što je i parametarski oblik jednadžbe tražene plohe. Eliminacijom parametra φ iz prvih dviju jednadžbi $(x^2 + (y - t)^2 = 36)$ i zamjenom $t = z$ dobivamo jednadžbu plohe $x^2 + (y - z)^2 = 36$ u implicitnom obliku.

U Winplotu možemo plohe zapisivati jednadžbama u eksplicitnom, parametarskom, implicitnom obliku ili u cilindričnim, odnosno sfernim koordinatama.

Pogledajmo kako izgleda graf naše cilindrične plohe zapisane parametarski, odnosno implicitno.





Važno je napomenuti — ako želimo vidjeti plohu zadanu u implicitnom obliku, trebamo u dijaloškom okviru *Inventory* koristiti dijalog "level curves". Tamo možemo zadavati boju plohe ili nivoe, ali ne možemo površinu u cjelini osjenčati. Program nema načina pronaći kako prostrana mora biti "kutija" koju zaprema naš model. To ćemo zadati sami u dijalogu "box" u dijaloškom okviru *Inventory*.

Za izračunavanje volumena iz implicitne jednadžbe plohe prijeđimo na njezin eksplicitni oblik. Lijeva "polovina" plohe ima jednadžbu $z = y + \sqrt{36 - x^2}$. Volumen tijela koji dobivamo prije opisanim presjekom bit će jednak

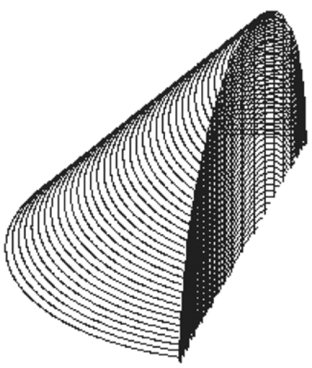
$$\int_{-r}^{r} dx \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{0} \left(y + \sqrt{36 - x^2}\right) dy = \frac{2}{3} r^3.$$

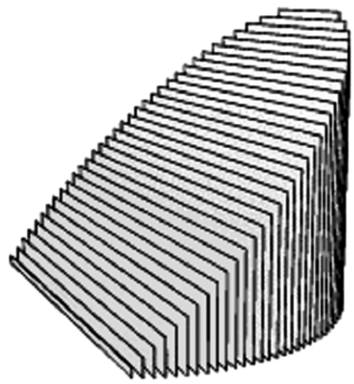
Izračunavanjem gornjeg integrala u našem specijalnom slučaju

$$\left(\int_{-6}^{6} dx \int_{-\sqrt{36-x^2}}^{0} \left(y + \sqrt{36 - x^2}\right) dy\right)$$

dobiva se točna vrijednost 144 cm^3. Nije li neobično da se u volumenu ovog tijela ne pojavljuje broj π? Integriranjem ove funkcije $f(x, y) = y + \sqrt{36 - x^2}$ u Winplotu nećemo dobiti točan volumen tijela, već volumen umanjen za onaj dio koji se do zadane granice $(-6 < x < 6, -6 < y < 6)$ nalazi ispod xy ravnine, a iznad plašta kosog stošca.

Usporedila sam tijela nastala odsijecanjem kosog i uspravnog valjka. Interesantno je bilo primijetiti da tijela imaju jednak volumen — baze su sukladni polukrugovi, visine su jednake, a prilikom odsijecanja ravninama paralelno bazi dobivamo sukladne kružne odsječke. Cavalierijev princip kaže da ta dva tijela imaju jednak volumen. I stvarno, kada sam pogledala izvod i formulu na gore spomenutoj web stranici, našla sam da odgovarajuće kopito uspravnog valjka ima volumen 144 cm^3. Do volumena kopita uspravnog valjka došla sam preko kopita kosog valjka.

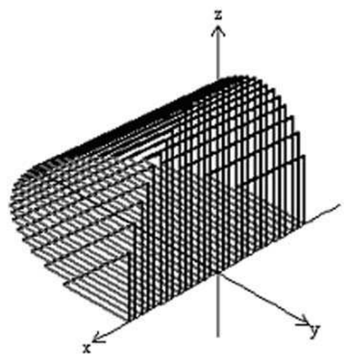




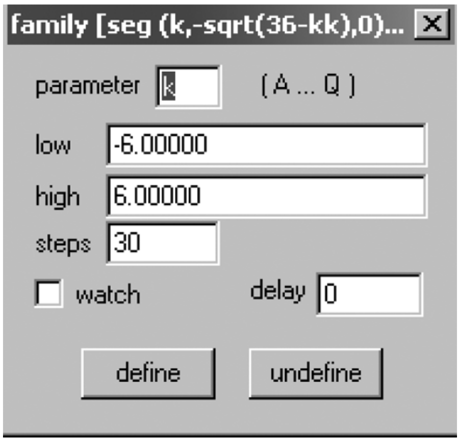
I ne samo to. Pala mi je na pamet ideja da se mogu poslužiti sličnim trikom koji je upotrebljen i kod izvoda volumena kopita na `http://mathworld.wolfram.com/CylindricalWedge.html`.

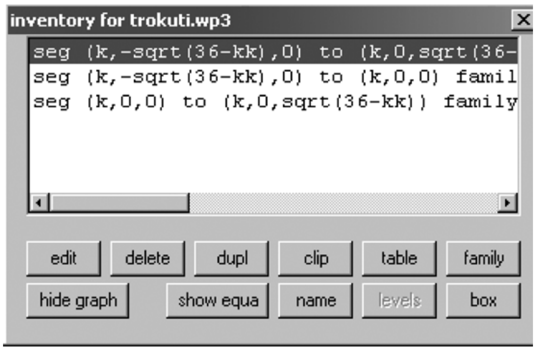
Umjesto da tražim jednadžbu plohe i računam volumen tijela ispod te plohe, zašto ne bih rezala svoje kopito ravninama paralelnima yz ravnini? U presjeku nastaju jednakokračni trokuti kojima su duljine kateta $y(x)$, $z(x)$ ovisne o udaljenosti x od ishodišta.

Kako ovo nacrtati u Winplotu? Dužine se mogu zadati pomoću parametra koji definiramo sami. Tako sam dužine koje predstavljaju hipotenuze prereza kopita zadavala od točke $\left(k, -\sqrt{36 - k^2}, 0\right)$ do točke $(k, 0, \sqrt{36 - k^2})$, a zatim u dijaloškom okviru *Inventory*, u izborniku *family* zapisala k kao parametar, zadala mu granice od -6 do 6 te zadala 30 koraka (presjeka).



Nakon što sam pritisnula gumb *define*, pojavila se gornja slika.





Sada možemo izračunati volumen tijela zbrajajući beskonačno mnogo površina takvih trokuta (čije su katete $z(x)$ i $y(x)$) duž x-osi, od -6 do 6, tj. od $-r$ do r, zapravo integrirajući po x.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} z(x)y(x)dx \\
&= \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{r^2 - x^2}dx \\
&= \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)dx \\
&= \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{2}{3}r^3.
\end{aligned}
$$

Ovim načinom problem izračunavanja volumena možemo donekle približiti i objasniti naprednijim učenicima na kraju četvrtog razreda gimnazije ili tehničke škole.

I na kraju malo o programu Winplot. Autor ovog programa je Richard Parris, profesor na Phillips Exeter Akademiji u Exeteru, New Hampshire, SAD. On je autor čitave palete programa Peanut softvera koje možete naći na stranici `http://math.exeter.edu/rparris/`. Korisnici Winplota osnovali su mailing listu `http://groups.yahoo.com/group/peanut_software/`, kao i cijelu bazu podataka za razmjenu materijala i uradaka na `http://www2.spsu.edu/math/Dillon/Peanutdocs/`. Na Internetu se mogu naći i instrukcije za korištenje na `http://matcmadison.edu/alehnen/winptut/winpltut.htm`. Sam program Winplot možete preuzeti na stranici `http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html` i odmah korisititi jer je besplatan. Winplot je grafički program opće namjene za crtanje i animiranje krivulja ili ploha u dvjema ili trima dimenzijama i u različitim zapisima. Prilikom korištenja ovog programa treba biti strpljiv. Njegove mogućnosti u matematičkom pogledu su velike. Pruža nam opcije koje ne mogu ni mnogi komercijalni programi. Međutim, skromnog je sučelja — siromašan dizajn, prilično složen za uporabu nematematičaru, teško je unositi izmjene. . . . Ali zato je besplatan i možemo ga ponekad koristiti ne samo za crtanje grafova, već i za izračunavanje i kontrolu dobivenih rezultata.

Ne treba ga preporučiti za uporabu učeniku srednje škole. Nastavnik ga može povremeno koristiti u demonstracijske svrhe ili kao pomoćno sredstvo za potrebe zornosti u stereometriji ili analitičkoj geometriji. Meni je pomogao kod rješavanja zadanog problema u kontroli i zornom prikazu rješenja. Prilikom korištenja ovog programa obnovila sam i ponovo naučila mnoge elemente analitičke geometrije u trima dimenzijama, parametarski prikaz krivulja i ploha te vektorsku matematiku.

Zahvaljujem profesorici Senki Sedmak na korisnim idejama i korekcijama kojima je pridonijela stvaranju ovog članka.