Tko je prvi...
definirao zlatni rez?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Malo se koji matematički pojam češće (i neispravnije) koristi u svakodnevnom jeziku i jeziku humanističkih struka od zlatnog reza. Poznat je kao idealni omjer, a navodno je po nekim istraživanjima oku najugodniji omjer. Većina ga poistovjećuje s omjerom stranica pravokutnika iznosa 0.6 (ili u najboljem slučaju 0.618) iako se radi o iracionalnom omjeru.

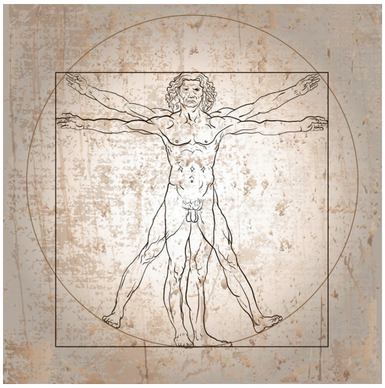
Također, mnogi znaju da je taj omjer proglašen idealnim u doba renesanse, ali on potječe iz antičke Grčke. Neki ga vide u raznim građevinama, primjerice Partenonu ili čak egipatskim piramidama, zaboravljajući da su sve mjere samo aproksimativne (zbog greške u mjerenju) i da je graditelj možda i imao određeni omjer na pameti, no ako uočimo omjer 0.6, ne možemo znati je li ciljani omjer bio točno 0.6 ili je bio 0.607, 0.618 ili egzaktno zlatni rez.

Krenimo unatrag: od naziva, preko idealizacije do prve definicije.

Naziv *zlatni rez* poprilično je nov – ni da Vinci ni Fidija omjer o kojem pričamo ne bi zvali zlatnim rezom. Sigurno je da se koristi tek od 19. stoljeća, a većinom ga se pripisuje njemačkom matematičaru **Martinu Ohmu** (1792. – 1872., slika 1), koji je 1815. objavio matematički udžbenik u kojem se, kako se čini, prvi put koristi naziv zlatni rez (zlatni omjer).

Idealizacija ovog omjera potječe, kako smo rekli, iz renesanse, kad su ga svjesno u planiranju svojih djela koristili mnogi veliki umjetnici i kad je dobio ime *božanski omjer*. Za posljednje je zaslužna knjiga "De divina proportione" (*O božanskom omjeru*, 1509.) talijanskog matematičara **Luce Pacilija** (živio je otprilike 1445. – 1515.). Radi se o jednoj od prvih knjiga o matematici perspektive, a uključuje i razne omjere te se u prvom dijelu bavi omjerom zlatnog reza. Knjigu je ilustrirao Pacolijev prijatelj, poznat po slikama u čijoj je konstrukciji bitan ovaj omjer, **Leonardo da Vinci** (1452. – 1519., slika 2) te sadrži mnoge vrijedne ilustracije, ali ostala je zapamćena ponajviše po tome što je ovaj omjer uzdigla do božanskog stupnja. Pacioli čak argumentira svoj naziv – ovaj omjer treba nazvati božanskim jer njegova vrijednost predstavlja božansku jednostavnost, njegova definicija zahtijeva tri duljine čime simbolizira Sveto Trojstvo, nje-

Slika 1. Martin Ohm, autor je naziva *zlatni rez* (izvor: Wikipedia, slika objavljena kao *public domain*)

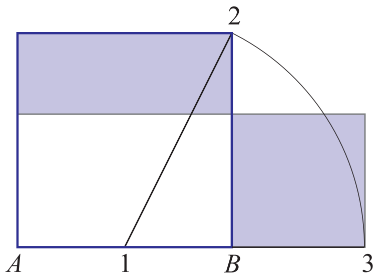


Slika 2. Vitruvijanski čovjek (Leonardo da Vinci, 1492.) (izvor: Wikipedia, slika objavljena kao *public domain*)

doc. dr. sc. Franka Miriam Brueckler, Zavod za matematičku analizu, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, `bruckler@math.hr`

gova iracionalnost simbolizira nedokučivost Boga, njegova samosličnost odraz je Božje sveprisutnosti i stalnosti, a uz to je povezan i s pravilnim dodekaedrom,[1] simbolom kvintesencije.

No, omjer zlatnog reza definiran je u doba antičke Grčke. Najstarije poznato djelo koje ga sadrži su znameniti Euklidovi *Elementi*. U drugoj knjizi, u propoziciji 11 Euklid daje konstrukciju ovog omjera (slika 3), ali mu još ne daje ime; ime tom omjeru daje u šestoj knjizi i naziva ga podjelom dužine u "krajnjem i srednjem" omjeru. No, poznato je da se druga knjiga Euklidovih *Elemenata* temelji na pitagorejskim dostignućima te je općeprihvaćeno da su prvi koji su se bavili ovim omjerom, a to je *omjer u kojem treba podijeliti dužinu ako se čitava dužina prema duljem dijelu treba odnositi jednako kao dulji prema kraćem dijelu,* bili pitagorejci u 6. st. pr. Kr. Oni su ovaj omjer s priličnom sigurnošću otkrili proučavajući svoj simbol, pentagram od pet dijagonala pravilnog peterokuta (slika 4). Naime, te se dijagonale međusobno dijele upravo u omjeru zlatnog reza i neki moderni povjesničari čak smatraju da je stoga taj omjer, a ne omjer dijagonale i stranice kvadrata, prvi otkriveni nesumjerljivi omjer (odnosno, omjer duljina koji nije izraziv racionalnim brojem).

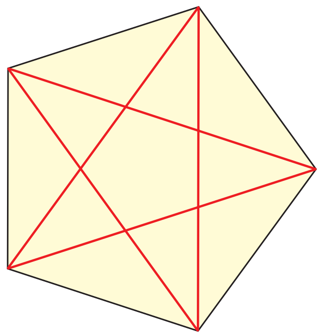


Slika 3.
Euklidova, tj. pitagorejska, konstrukcija – točka 1 je polovište dužine $\overline{AB}$, $|AB| = |B2|$, a $|B3| : |AB|$ je omjer zlatnog reza.

Danas, naravno, znamo da se opisana definicija može algebarski svesti na kvadratnu jednadžbu čije je pozitivno rješenje $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ traženi omjer. Radi se o iracionalnom broju, što se lako dokaže – i pitagorejci su to vjerojatno upravo tako učinili u kontekstu nesumjerljivosti – koristeći Euklidov algoritam. Naime, omjer je definiran kao $a : b$ takav da je $a : b = b : (a - b)$. Ako bi se radilo o sumjerljivim veličinama (mi bismo rekli: ako bi taj omjer bio racionalan broj)[2], bio bi jednak omjeru dvaju prirodnih brojeva m i n i za njih bi isto vrijedilo

$$m : n = n : (m - n).$$

No, primjenom Euklidova algoritma s ciljem određivanja najveće zajedničke mjere za m i n primijetit ćemo da se – zbog definicije omjera – u svakom koraku djeljenik prema djelitelju odnosi kao djelitelj prema ostatku, tj. stalno su u istom omjeru kao polazni m i n te stoga Euklidov algoritam nikad ne staje, što je nemoguće za prirodne brojeve m i n – oni uvijek imaju najveću zajedničku mjeru.



Slika 4. Pitagorejski pentagram.
Dijagonale se međusobno dijele u omjeru zlatnog reza.

LITERATURA

1/ MacTutor History of Mathematics Archives. Martin Ohmh, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Ohm_Martin.html`

2/ F. M. Brückler (2017.): *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Aritmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik*, Springer Spektrum.

3/ J.-H. Eschenburg (2017.): *Sternstunden der Mathematik*, Springer Spektrum.

---

[1] U pravilnom se dodekaedru zlatni rez pojavljuje dvostruko, s jedne strane zbog toga što su strane pravilni peterokuti i njihove se dijagonale dijele u omjeru zlatnog reza, a s druge jer ako spojimo četiri središta strana pravilnog dodekadra tako da čine pravokutnik – po dva su središta susjednih strana i ti parovi međusobno nasuprotni – omjer duljina stranica tog pravokutnika je zlatni rez, vidi `http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phi3DGeom.html`

[2] Za pitagorejce i općenito antičke Grke samo su prirodni brojevi smatrani brojevima. Stoga u antičkom kontekstu nema smisla govoriti o (i)racionalnim brojevima, već o (ne)sumjerljivim istovrsnim veličinama.