Marie-Sophie Germain

Nikola Pavlinić, Zagreb

Marie-Sophie Germain francuska je matematičarka koja je živjela za vrijeme Francuske revolucije i Napoleonovih ratova. Morala se boriti s nizom predrasuda tadašnjeg društva i nemogućnosti formalnog obrazovanja, ali je unatoč svemu postigla zavidnu matematičku karijeru. Najviše je ostala zapamćena zbog svog doprinosa u razvoju teorije brojeva.

Marie-Sophie Germain, izvor: **https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Germain.jpeg**, (*public domain*)

Djetinjstvo i odrastanje

Marie-Sophie Germain je rođena 1. travnja 1776. godine u Parizu. Prema mnogim izvorima njezin otac, Ambroise-François, bio je dobrostojeći trgovac svilom, dok neki tvrde da je obrađivao plemenite kovine kao što su zlato i srebro. U svakom slučaju, obitelj je Marie-Sophie mogla priuštiti školovanje i podršku u daljnjem životu. Sophie je odrasla u peteročlanoj obitelji kao srednje dijete. Imala je mlađu sestru Angélique-Ambroise te stariju sestru Marie-Madeline, koja je dobila ime po majci. Francuska revolucija i pad Bastille doveli su do značajnih promjena u životu i radu Parižana pa je tako i Sophie kao dijete bila primorana provoditi vrijeme isključivo unutar obiteljske kuće. U to doba imala je trinaest godina te je zanimaciju pronašla u očevoj zbirci knjiga. Naišla je na knjigu J. E. Montucla *L'Histoire des Mathématiques* u kojoj ju je zaintrigirala priča o Arhimedovoj[1] smrti. Potaknuta Arhimedovim entuzijazmom prema matematici i sama je odlučila detaljnije proučavati matematiku. Tako je pročitala sve knjige iz očeve zbirke vezane za matematiku. Potom je samostalno krenula učiti latinski i grčki kako bi mogla čitati radove Sir Isaaca Newtona[2] i Leonharda Eulera[3]. U početku Germain nije imala podršku roditelja, prvenstveno jer se u to doba smatralo neprimjereno da se žena bavi matematikom. Ustrajno su je odgovarali, ali njezina volja je sve nadjačala. S vremenom ju je majka počela potajno podržavati. U Parizu se 1794. godine otvorila prestižna francuska škola znanosti i inženjerstva, École Polytechnique. Sophie je tada imala osamnaest godina, ali se nije mogla upisati u školu samo zato što je žena. Ni tada nije odustajala jer su bilješke s predavanja bile dostupne svima koji su ih zatražili. Dobivši bilješke, Germain je počela pisati svoja zapažanja te ih je odlučila poslati Josephu Louisu Lagrangeu[4] koji je bio član fakulteta. Kako bi bila sigurna da će njezine bilješke biti shvaćene ozbiljno pisala je pod krinkom

Nikola Pavlinić, student preddiplomskog studija Matematike na PMF-MO Sveučilišta u Zagrebu, **nikola.pavlinic@yahoo.com**

[1] grčki matematičar, fizičar i astronom, 287. pr. Kr. – 212. pr. Kr.
[2] engleski matematičar, fizičar, astronom i teolog, 1643. – 1727.
[3] švicarski matematičar, fizičar, astronom i logičar, 1707. – 1783.
[4] francuski matematičar i astronom, 1736. – 1813.

muškarca i to bivšeg studenta gospodina Antoine-Augustea Le Blanca. Pročitavši rad, Lagrange je zahtijevao sastanak s Le Blancom. Sophie se tada više nije mogla skrivati pod krinkom muškarca te je odlučila otići do Lagrangea. Lagrange je bio iznenađen kada je shvatio da mu je pisala žena, ali to ga uopće nije smetalo te je postao njezin mentor.

Teorija brojeva

Marie-Sophie se prvi put zainteresirala za teoriju brojeva 1798. godine. Naime, te je godine Adrien-Marie Legendre[5] objavio rad *Essai sur la théorie des nombres*. Kako je i sama proučavala matematiku, Legendreov rad ju je potaknuo da se detaljnije počne baviti teorijom brojeva. Zahvaljujući istim interesima, Germain i Legendre su započeli suradnju u teoriji brojeva, a kasnije i u teoriji elastičnosti. Legendre je neke njezine radove objavio u *Supplément*. Carl Friedrich Gauß[6] se također bavio teorijom brojeva te je napisao monumentalan rad *Disquisitiones Arithmeticae*. Sophie se tri godine bavila proučavanjem Gaußovog rada te je pojedine teoreme pokušavala dokazati na svoj način. Svoje prijedloge dokaza i ostala zapažanja odlučila je podijeliti s Gaußom te mu je prvo pismo poslala 21. studenog 1804. ponovno pod krinkom M. Le Blanca. U pismu je spominjala Gaußove *Disquisitiones* i predstavila je početak svog rada na *velikom Fermatovu teoremu* koji kaže da jednadžba $x^n + y^n = z^n$ za prirodan broj $n > 2$ nema rješenje u skupu prirodnih brojeva. Tvrdila je da je dokazala teorem za $n = p - 1$, gdje je p prost broj oblika $p = 8k + 7$. Međutim Gauß u odgovoru nije komentirao dokaz, vrlo vjerojatno zbog slabe pretpostavke. Za vrijeme Napoleonovih ratova 1807. godine Francuska je okupirala njemački grad Braunschweig u kojem je živio Gauß. Germain se zabrinula da bi Gaußa mogla snaći Arhimedova sudbina te je pisala generalu Pernetyu, koji im je bio obiteljski prijatelj, da osigura Gaußovu sigurnost. Pernety ju je poslušao, ali je sam Gauß bio zbunjen jer prije nije čuo za Sophie Germain. Potom mu je Sophie u pismu objasnila da mu je prije tri godine pisala pod krinkom muškarca. Gauß je, kao i Lagrange, bio ugodno iznenađen, međutim njihova suradnja nije bila kontinuirana kako se Gauß udaljio od teorije brojeva. Zanimljivo je kako se Germain i Gauß nikad nisu upoznali. Germain je u pismu Gaußu poslala sljedeću slutnju:

Slutnja 1. *Ako je $x^n + y^n$ oblika $h^2 + nf^2$, onda su i $x + y$ istog oblika.*

Gauß je pokazao da Slutnja 1 ne vrijedi. Naime $15^{11} + 8^{11}$ se može napisati u obliku $h^2 + nf^2$, ali $15 + 11$ ne može.

Akademija je 1815. raspisala nagradu za dokaz *velikog Fermatova teorema*. To je potaknulo Germain da nakon deset godina pošalje Gaußu pismo u kojem opisuje strategiju za opći dokaz teorema, uključujući dokaz za poseban slučaj te je još sadržavalo njezin značajan napredak prema dokazu. Gauß nikada nije odgovorio na to pismo.

Germainin rad je doveo do zaključka da je za dokaz *velikog Fermatova teorema* dovoljno dokazati sljedeća dva slučaja:

Slučaj 1. *Neka je p prost broj te neka su x, y, z i p relativno prosti. Tada jednadžba $x^p + y^p = z^p$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.*

Slučaj 2. *Neka je p prost broj te neka vrijedi da p dijeli barem jedan od x, y, z. Tada jednadžba $x^p + y^p = z^p$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.*

Naime, dovoljno je promatrati proste eksponente p jer ako postoji protuprimjer za prost eksponent, tada taj isti protuprimjer vrijedi i za složene eksponente.

[5] francuski matematičar, 1752. – 1833
[6] njemački matematičar i fizičar, 1777. – 1855.

Teorem 1 (Germain). *Neka je p prost broj takav da je $2p+1$ također prost. Tada ne postoje $x, y, z \in \mathbf{N}$ takvi da p ne dijeli ni jedan od njih i da je $x^p+y^p = z^p$.*

Sophie je taj rezultat koristila za dokaz slučaja 1 za sve neparne proste brojeve $p < 100$, ali prema Andrei Del Centini, pokazala je da vrijedi i za svaki eksponent $p < 197$. L. E. Dickson[7] je kasnije upotrijebio teorem 1 za dokaz *velikog Fermatova teorema* u slučaju neparnih prostih brojeva manjih od 1700. Zanimljivo je da je teorem 1 poznat samo zato što ga je Legendre zapisao kao fusnotu u radu *Legendreova rasprava o teoriji brojeva*, gdje ga je koristio za dokaz *velikog Fermatova teorema* za $p = 5$. Germain je u svom neobjavljenom radu *Remarque sur l'impossibilité de satisfaire en nombres entiers a l'équation* $x^p + y^p = z^p$ pokazala da protuprimjer za *veliki Fermatov teorem* za $p > 5$ mora biti broj s četrdesetak znamenaka.

Prost broj p sa svojstvom iz teorema 1, odnosno takav da je i $2p+1$ prost, naziva se *prost broj Sophie Germain*. Prvih deset prostih brojeva Sophie Germain su:

$$2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89 \ldots$$

Najveći trenutno poznati prost broj Sophie Germain ima 388 342 znamenke, a otkriven je 2016. godine. Jedan od otvorenih problema teorije brojeva je sljedeća slutnja:

Slutnja 2. *Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva Sophie Germain.*

Prosti brojevi Sophie Germain primjenjuju se u kriptografiji javnog ključa.

Teorija elastičnosti

Pored zavidnog rada na teoriji brojeva Sophie se hrabro upustila u neobjašnjene tvrdnje u teoriji elastičnosti. Glavni poticaj joj je bila raspisana nagrada od strane Pariške akademije znanosti za matematičko objašnjenje vibracija metalnih pločica. Matematičko objašnjenje trebalo je usporediti s rezultatima pokusa Ernesta Chladnia[8]. Lagrange je rekao da rješenje ovog problema zahtijeva uspostavljanje nove grane analize, što je odvratilo sve zainteresirane osim Germain te Simeon-Denisa Poissona[9]. Međutim, Poisson je tada izabran u Akademiju te mu problem vibrirajućih metalnih pločica više nije bio prioritet. Germain se nije pokolebala te je 1809. godine započela s radom. Legendre joj je ustupio poznate jednadžbe i istraživanja. Završila je s radom 1811. te je rad poslala u Akademiju. Ocjenjivačko povjerenstvo smatralo je da nisu uspostavljene točne jednadžbe, unatoč dobrim rezultatima. Natjecanje je produljeno za dvije godine. Sophie je odlučila ponovno pokušati osvojiti nagradu. Ovoga puta je 1813. anonimno predala rad, ali ni ovaj put nije prihvaćen zbog matematičkih problema posebice vezanih uz dvostruki integral. Natjecanje je ponovno produženo i Germain je po treći put pokušala riješiti problem. Ovaj se put konzultirala s Poissonom. On je 1814. objavio rad o elastičnosti, ali nije priznao Germaininu pomoć, iako je s njom radio na tome te je kao član komisije imao pristup njezinim radovima. Marie-Sophie Germain je 1816. predala treći rad naslova *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques* i to pod svojim imenom. Rad je prihvaćen i time je postala prva žena koja je osvojila nagradu Pariške akademije znanosti. Germain je izvela točnu diferencijalnu jednadžbu, ali njezina metoda nije predvidjela eksperimentalne rezultate s velikom točnošću, jer se oslanjala na pogrešnu Eulerovu jednadžbu koja ju je dovela do pogrešnih rubnih uvjeta. Konačna Germainina jednadžba glasi:

$$N^2\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

gdje je N^2 konstanta.

Nakon što je osvojila nagradu i dalje nije smjela pohađati Akademiju samo zbog tradicije koja je isključivala žene, osim žena članova Akademije. Tek

[7] američki matematičar, 1874. – 1954.
[8] njemački fizičar, 1756. – 1827.
[9] francuski matematičar, fizičar i inženjer, 1781. – 1840.
[10] francuski matematičar i fizičar, 1768. – 1830.

nakon sedam godina joj je Joseph Fourier[10], koji je bio član Akademije, omogućio pohađanje predavanja.

Sophie je 1821. o vlastitom trošku objavila svoj pobjednički rad. To je napravila kako bi svoj rad suprotstavila Poissonovu. U radu je navela i greške u određenim metodama. Navedene greške je ispravila 1826. uvođenjem pojednostavljenih hipoteza. Akademija nije željela objaviti rad jer bi tada Germain trebali uvažavati kao kolegicu što im nije odgovaralo. Augustin-Louis Cauchy[11] joj je savjetovao da samostalno objavi rad što je ona i učinila.

Posthumno je 1831. objavljen njezin rad na temu elastičnosti naslova *Mémoire sur la courbure des surfaces*.

Filozofija

Germain se uz matematiku bavila filozofijom i psihologijom. Željela je klasificirati činjenice i generalizirati ih u zakone koji bi mogli tvoriti sustav psihologije i sociologije, koji su tada tek nastajali. Auguste Comte[12] je hvalio njezin rad u filozofiji. Posebno ga se dojmio njezin rad *Considérations* u kojem tvrdi da ne postoje razlike između prirodnih znanosti i humanističkih znanosti. Filozofski radovi *Pensées diverses* i *Considérations générales sur l'état des sciences et des lettres, aux différentes époques de leur culture* objavljeni su posthumno, a za što je najviše zaslužan njezin nećak Lherbette koji je sakupljao njezine filozofske radove.

Završne godine

Marie-Sophie Germain je 1829. dijagnosticiran rak pluća. Unatoč bolesti ona je nastavila sa svojim radom. Tako je 1831. u Crelle's Journalu objavila rad o zakrivljenosti elastičnih površina. Nažalost 1831. godine bolest je pobijedila te je Germain preminula. Počasni doktorat sveučilišta Göttingen, za što se osobno zauzeo i sam Gauß, dodijeljen joj je posthumno, šest godina nakon smrti.

Dostignuća Sophie Germain i pristup bili su revolucionarni za ženu toga doba. Borila se protiv društvenih predrasuda i nedostatka formalnog obrazovanja kako bi postala priznata matematičarka. Najviše je ostala zapamćena zbog svog rada u teoriji brojeva, ali njezin je rad u teoriji elastičnosti također vrlo važan za matematiku.

Njoj u čast *Institut de France* 2003. godine uspostavio je nagradu *Sophie Germain Prize*.

Nagrada se dodjeljuje jednom godišnje francuskim matematičarkama i matematičarima u iznosu od 8000 eura za istraživanja u matematici.

[11] francuski matematičar, fizičar i inženjer, 1789. – 1857.

[12] francuski filozof, 1798. – 1857.

LITERATURA

1/ Z. Franušić, N. Pavlinić (2018.): *O distribuciji prostih brojeva*, Acta mathematica Spalatensia. Series didactica (AMAS), **1**, 41–50.

2/ Z. Franušić, N. Pavlinić (2019.): *Raznovrsni prosti*, Acta mathematica Spalatensia. Series didactica (AMAS), **2**.

3/ *Encyclopedia.com*, https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/sophie-germain

4/ *Marie-Sophie Germain*, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Germain.html

5/ *Encyclopedia Britannica*, https://www.britannica.com/biography/Sophie-Germain

6/ *Marie-Sophie Germain*, https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/germain.htm

7/ *Hackaday*, https://hackaday.com/2018/03/20/sophie-germain-the-mathematics-of-elasticity/

8/ *History of Scientific Women*, https://scientificwomen.net/women/germain-sophie-39

9/ *Famous Mathematicians*, https://famous-mathematicians.com/sophie-germain/

10/ *The Life of Marie-Sophie Germain*, https://3010tangents.wordpress.com/2015/02/19/the-life-of-marie-sophie-germain/