Tangram u nastavi matematike, 1. dio

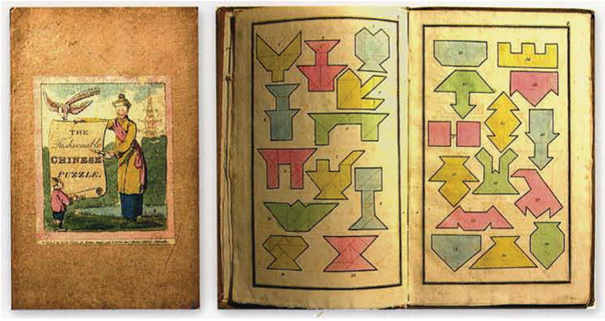
Andrea Kavajin i Nives Baranović, Split

U radu s didaktičkim sredstvima ne postoji čarolija koja garantira uspješno učenje, ali praktičan rad učenika može biti motivirajući za određene misaone aktivnosti, može biti inspirirajući za različite vrste rasprava bez kojih razumijevanje određenih sadržaja nije moguće, može biti prikladno okruženje za istraživački rad, uočavanje pravilnosti i formuliranje zaključaka što je odlika matematičkog mišljenja.

Slagalica tangram je privlačna zbog svoje jednostavnosti, ali i zbog mogućnosti prilagodbe svim uzrastima, a kao didaktičko sredstvo izazovna je zbog mogućnosti primjene u različitim fazama nastavnog procesa. Kako nijedno nastavno sredstvo nije samo po sebi niti dobro niti loše, već njegova vrijednost ovisi o načinu primjene, tako i slagalica tangram može biti beskorisna, ali i moćno didaktičko sredstvo za učenje matematike i razvoj matematičkog mišljenja. Stoga je cilj ovog rada ukazati na različite mogućnosti svrsishodne primjene slagalice tangram u nastavi matematike, posebno geometrije, u cilju razvoja različitih vještina i procesa mišljenja.

O tangramu

O tangramu kao matematičkoj igrački bilo je riječi u 62. broju MIŠ-a (vidjeti [1]). Ukratko, o podrijetlu tangrama se zapravo jako malo zna, a ni podrijetlo samog naziva nije u potpunosti razjašnjeno. Kako su se prva tiskana izdanja pojavila u Kini početkom 19. st., a zatim širila prema Americi, Europi i Aziji, neki su nazivi s vremenom bili učestaliji pa je tako naziv **tangram** danas postao općeprihvaćeno ime za drevnu kinesku slagalicu. Uz taj naziv često se spominje i jedan stari kineski naziv, *Ch'i ch'iao t'u*, koji u engleskom prijevodu znači *seven ingenious plan*, odnosno "sedam pločica mudrosti" (vidjeti [1], [2]). Prvi pisani trag o tangramu na prostorima Europe datira iz 1818. godine (slika 1), dakle, prije punih 200 godina (vidjeti [2], [5]).



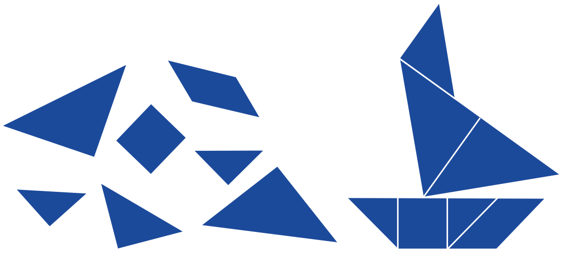
Slika 1. Naslovnica i zagonetke iz knjige *Moderna kineska slagalica* – slika preuzeta iz [5, str. 46].

Pojavom prvih pisanih materijala tangram je vrlo brzo postala popularna rekreacijska slagalica u svim dijelovima svijeta, prihvaćena u svim strukturama društva, a sudeći prema sadržajima na brojnim internetskim stranicama, može se reći da je popularna i danas, nakon puna dva stoljeća. Osim za zabavu, stručnjaci raznih profila koriste je i u dru-

Andrea Kavajin, mag. prim. obrazovanja, odgajateljica, DV Princeza, Split, andreakavajin@gmail.com
Nives Baranović, prof., viši predavač, Odsjek za učiteljski studij, Filozofski fakultet u Splitu, nives@ffst.hr

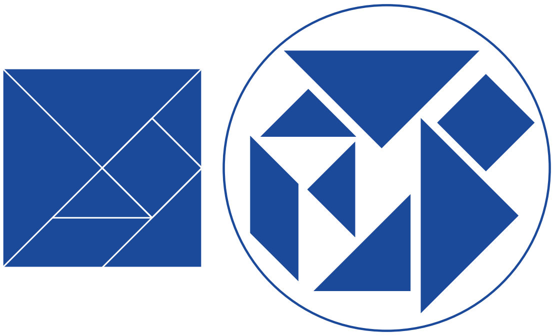
ge svrhe: dizajneri izrađuju namještaj i posude u obliku tangrama, umjetnici stvaraju nakit nalik tangram likovima, menadžeri i filatelisti tangram likovima promoviraju razne ideje..., a matematičari ga koriste u svrhu učenja matematičkih sadržaja i razvijanja matematičkog mišljenja. Ako se i sami poželite baviti njime, pazite da vas ne uhvati *tangram groznica* (vidjeti [2]).

Kako se o samom nastanku slagalice tangram ne zna baš mnogo, bio je to prikladan prostor za stvaranje raznih priča i legendi koje se u nedostatku dokaza ne mogu ni potvrditi niti odbaciti. Prema jednoj od poznatih legendi, slagalica tangram je nastala kada se sluga, noseći kralju staklo kvadratnog oblika za prozor njegove palače, spotakao i staklo razbio. Ali na iznenađenje svih, staklo nije bilo uništeno već razlomljeno na 7 točno određenih geometrijskih oblika (slika 2a)). U nastojanju da se pred kraljem opravda, prepričavajući svoje naporno putovanje, sluga je od dijelova stakla slagao razne figure ne bi li i vizualno dočarao svoju priču. Tako je slagao brod (slika 2b)) dok je pričao o prelasku rijeke. Kralj je, oduševljen mogućnostima slaganja raznovrsnih oblika, dao izraditi identične drvene geometrijske likove i tako je nastala slagalica tangram koju je prihvatilo cijelo njegovo kraljevstvo (vidjeti [3]).



Slika 2. Dijelovi tangram slagalice i brod sastavljen od tih dijelova

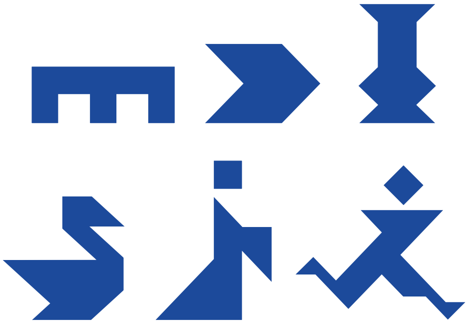
Slagalica tangram kroz povijest se izrađivala od raznih materijala, a danas se najčešće izrađuje od drva ili plastike i dostupna je širom svijeta. No, slagalica tangram ne mora se kupiti jer se vrlo jednostavno može izraditi od kartona ili malo debljeg papira. Dovoljno je nacrtati kvadrat određene veličine, podijeliti ga kao na slici 3 i izrezati (najčešće se koristi kvadrat duljine stranice 12 cm). Skup od sedam dobivenih geometrijskih likova čini **slagalicu tangram**. Svaki dio slagalice naziva se **tan**, a lik oblikovan od svih sedam tanova naziva se **tangram lik**. Na primjer, lik sa slike 2b) naziva se *tangram: brod*, a kvadrat sa slike 3 naziva se *tangram: kvadrat*. Pri izradi slagalice tangram za rad u učionici dobro je koristiti različite boje papira kako učenici, koji sjede zajedno, ne bi pomiješali dijelove.



Slika 3. Tangram: kvadrat i tanovi

Ova je slagalica dostupna i u dinamičkom okruženju: može se instalirati na mobilne uređaje, tablete, računala. Uz rad s modelom, aktivnosti s tangramom su prikladne i za rad u programima dinamičke geometrije, bilo da se bavite konstruiranjem ili istraživanjem i otkrivanjem određenih pravilnosti (vidjeti [4]).

Slagalica tangram privlači svojom jednostavnošću jer se sastoji od samo sedam jednostavnih geometrijskih oblika (pet trokuta i dva četverokuta), ali i intrigantnošću jer se s tih sedam tanova može oblikovati na tisuće različitih figura: slova, znamenaka, interpunkcijskih znakova, različitih vrsta simbola, oblika koji prikazuju osobe, životinje, biljke, predmete itd. (slika 4).



Slika 4. Tangram figure

Primjenom slagalice tangram u nastavi matematike kao manipulativnog nastavnog sredstva može se osigurati prikladno okruženje za aktivan rad učenika, samostalnu izgradnju znanja i suradničko učenje, što je odlika današnje suvremene nastave. Osim toga, može biti alat za razvoj strateškog rješavanja problema, za razvoj koncepta određenog matematičkog pojma, za razvoj matematičkog rječnika, kao podloga za istraživanje, otkrivanje i postavljanje matematičkih zakonitosti. Ukratko, za učenje matematike i razvoj matematičkog mišljenja.

Rad s tangramom

Iako postoje određene preporuke za rad s tangramom u nastavi matematike, onaj tko želi svrhovito osmišljavati aktivnosti za učenike, najprije mora sam steći određeno iskustvo jer je to osnovni preduvjet za učinkovito korištenje tangrama kao didaktičkog sredstva u nastavi matematike. U ovom se radu kroz tri grupe aktivnosti prikazuju odabrane tangram aktivnosti koje su se tijekom proteklih nekoliko godina provodile s različitim uzrastima. Neke od njih se razrađuju detaljnije, dok su druge dane samo idejno ostavljajući svakom korisniku mogućnost osobnog odabira i prilagodbe. Aktivnosti su detaljno opisane u diplomskom radu (vidjeti [2]).

Aktivnost 1. Upoznavanje

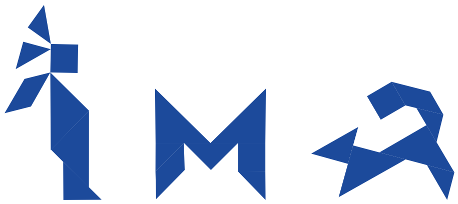
Na početku rada sa slagalicom tangram učenicima treba dopustiti da najprije rade slobodno, sami, bez uputa: samostalno mogu oblikovati neku od ponuđenih figura (kao npr. na slici 4) ili osmišljavati neke svoje figure. Nakon toga, osmišljene likove mogu crtati tako da nacrtaju njihove obrise ili način slaganja svih sedam dijelova u oblikovanu figuru. Zatim, mogu opisivati svoj način slaganja, a drugi po tom opisu slagati itd.

Svakako je potrebno neko vrijeme da se učenici zbliže s odabranim didaktičkim sredstvom, da steknu određeno iskustvo i uvide određene mogućnosti prije nego započnu s nekom konkretnom primjenom u matematici. Zapravo ni ove početne aktivnosti nisu bezvrijedne jer sve figure nisu jednostavne za slaganje, kao ni crtanje složenih likova, posebno za one učenike koji tu vještinu nisu razvili.

Osmišljavanje tangram likova

Pri oblikovanju tangram lika važno je da lik bude dobro osmišljen. Za određeni tangram lik kažemo da je **dobro osmišljen** ako se iz prikazanog lika može prepoznati ono što on predstavlja. Za sve tangram likove ne može se reći da su dobro osmišljeni jer različite osobe zbog različitog znanja i iskustva, ovisno o tome kako je slika prikazana, na istoj slici ne moraju vidjeti isto. Kao potvrdu toga dajemo rezultate jednog istraživanja (vidjeti [2]).

U istraživanju su sudjelovala 72 studenta (48 studenata 3. godine sa učiteljskog studija Filozofskog fakulteta u Splitu i 24 studenta 4. godine Kemijsko-tehnološkog fakulteta u Splitu). Oni su u upitniku ispod svake slike trebali napisati što za njih ta slika predstavlja, prvu misao. Ovdje izdvajamo tri primjera (slika 5).



Slika 5. Tangram: Indijanac, slovo M i vjeverica

Za lik sa slike 5a), koji idejno predstavlja Indijanca, ispitanici su imali različite interpretacije i među različitim studijskim grupama i među različitim prikazima unutar svake od studijskih grupa. Za 56 % studenata slika je prikazivala Indijanca, za 18 % studenata to je bio neki čovjek (žena, gejša, faraon, čovjek koji stoji, djevojčica s kosom u repu), 15 % njih je na slici prepoznalo vjetrenjaču, a preostalih 11 % su imali razne druge asocijacije (ventilator, fen, zvučnik koji trešti, kip, broj 1, ulična lampa). Na temelju dobivenih rezultata mogli bismo reći da lik nije idealno osmišljen jer nisu svi ispitanici prepoznali da je riječ o Indijancu. Ipak, ne može se reći ni da je osmišljen loše jer je nešto više od polovice ispitanika prepoznalo o kojem se liku radi. Zanimljiv je rezultat da su studenti učiteljskog studija u većoj mjeri na slici prepoznali lik čovjeka nego studenti kemije koji su na slici češće prepoznali neki predmet. To znači da ono što gledamo, pri interpretaciji upotpunjujemo svojim iskustvom i znanjem.

Za neke je tangram likove neosporno što oni predstavljaju i za njih možemo reći da su dobro osmišljeni. Takav je lik na primjer tangram: slovo M (slika 5b)). Među ispitanicima samo je 6 % studenata (4 od 72) imalo neku drugu interpretaciju (mačja glava; mačje uši, logotip superjunaka, batman), dok su svi ostali prepoznali slovo M.

Ako je lik nejasan ili slabije osmišljen, asocijacije na lik su raznovrsnije. Takva se u ovom ispitivanju pokazala slika koja je idejno prikazivala vjevericu (slika 5c)). Među studentima učiteljskog studija bilo je 20 različitih interpretacija (škorpion, rak, pas, mačka, ptica itd.), a samo je jedan student prepoznao vjevericu, dok je kod studenata kemije bilo 15 različitih interpretacija (gušter, pauk, lisica, zmaj itd.), ali nitko nije prepoznao vjevericu, a njih 15 % slika nije asocirala ni na što.

Ovi rezultati imaju jasnu implikaciju na vizualne prikaze u nastavi matematike, a posebno one složenije: učenici jednog razreda zbog različitih znanja i iskustava na istoj slici ne moraju vidjeti isto, što može biti realna teškoća u savladavanju i razumijevanju onoga što se poučava. To je važno osvijestiti i o tome voditi računa pri upotrebi vizualizacije u nastavi.

Geometrijski tangram likovi (trokuti, četverokuti, peterokuti itd.), posebno konveksni, uvijek su dobro osmišljeni, ali njihovo slaganje nije elementarno. Primjera radi, u prvom susretu sa slagalicom tangram, studentima je trebalo između 15 i 20 minuta da slože tangram: kvadrat.

Oblikovanje tangram likova

Aktivnost oblikovanja tangram likova, na temelju slike koja odgovara nekom originalu, može se provoditi na različite načine. Ta slika može biti zamišljena samo u nečijem umu, može biti umanjeni prikaz nekog originala, a može biti i kontura originala točno određene veličine.

Ako se lik oblikuje samo na temelju zamišljene slike, onda se radi o aktivnosti otvorenog tipa koja i nije baš jednostavna kao što se na prvi pogled čini, a posebno ako se želi dobro oblikovati neki tangram lik. Oblikovanje tangram lika na temelju umanjene slike koja predstavlja original nešto je jednostavnija aktivnost od prethodne jer slika ipak daje opipljivi model za slaganje. Ako se tangram lik slaže s pomoću konture originala odgovarajuće veličine, onda se lik oblikuje **popločavanjem**[2] **površine** unutar granica dane konture i ta aktivnost je znatno jednostavnija od prethodnih dviju (vidjeti [2]). Na početku rada sa slagalicom tangram korisno je da učenici iskušaju sva tri načina slaganja likova, a kasnije se u radu odabire onaj način koji je najkorisniji za postizanje željenog cilja.

Aktivnost 2. Mjerenje

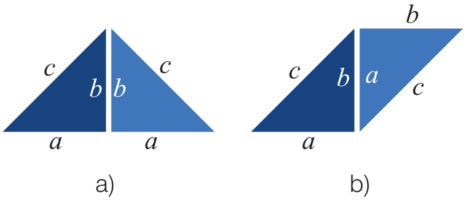
Nakon uvodnih bezbrižnih aktivnosti učenici se mogu postupno usmjeravati na ciljano istraživanje određenih pravilnosti. Na samom početku rada s tangramom dobro je istražiti i opisati osnovne karakteristike tanova (odnosi stranica, kutova, površina itd.), služeći se pri tome odgovarajućim definicijama, aksiomima i teoremima. Naime, tanovi nisu proizvoljno odabrani geometrijski likovi, već postoji točno određeni odnos među njima, a upoznavanje tog odnosa pomaže u daljnjem radu. Ovo istraživanje može se provoditi sa svim uzrastima, ali potrebno vrijeme i način provođenja ipak treba prilagoditi vještinama i predznanju učenika.

Stranice i kutovi tanova

Preklapanjem malih tan trokuta učenici jednostavno i brzo provjeravaju da se oni podudaraju u stranicama i kutovima te prema definiciji o sukladnosti zaključuju da se radi o **sukladnim** trokutima. Sada se za duljine njihovih stranica mogu uvesti oznake a, b i c. Služeći se aksiomom: *Ako su dva objekta jednaka trećem objektu, onda su i oni međusobno*

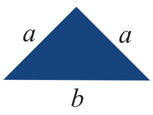
[2] Popločiti neki lik zadan konturom znači prekriti cijelu njegovu površinu zadanim dijelovima bez praznina i bez preklapanja.

jednaki te uspoređivanjem stranica ovih dvaju trokuta može se zaključiti da se stranica duljine b jednog trokuta podudara sa stranicom duljine a drugog trokuta, pa zaključujemo da su stranice duljine a i b istog trokuta jednake, $a = b$, odnosno mali tan trokuti su **jednakokračni** (slika 6). Služeći se poučkom: *Ako dva podudarna kuta zajedno čine ispruženi kut, onda su to pravi kutovi*, zaključuje se da je kut koji zatvaraju stranice duljina a i b pravi kut, (slika 6a)), odnosno trokuti su **pravokutni**.



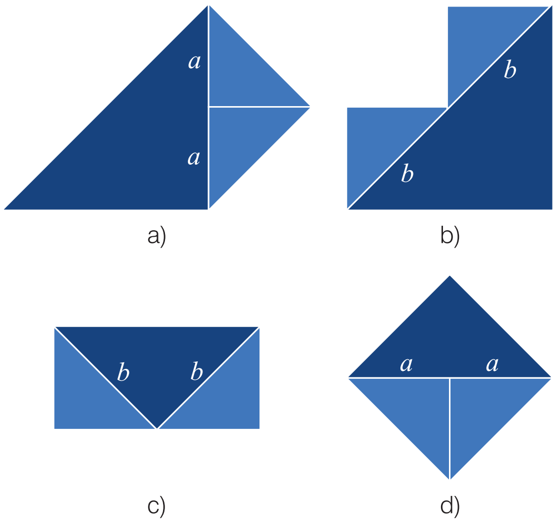
Slika 6. Uspoređivanje stranica malih tan trokuta

S obzirom na to da se radi o jednakokračnim pravokutnim trokutima, preostala su dva kuta šiljasta i međusobno podudarna, veličine $45°$ jer prema poučku o odnosu stranica i kutova u trokutu vrijedi: *Nasuprot stranica jednakih duljina nalaze se kutovi jednakih veličina*, a prema poučku o unutarnjim kutovima vrijedi: *Zbroj veličina svih unutarnjih kutova trokuta iznosi* $180°$ te je $45° + 45° + 90° = 180°$. U daljnjem se radu duljine kateta malih tan trokuta mogu označavati sa a, a duljina hipotenuze sa b. Od osmog razreda pa nadalje učenici znaju da prema Pitagorinu poučku vrijedi: $b = a\sqrt{2}$ (slika 7), što omogućava razna druga istraživanja. Nakon izvedenih zaključaka mali tan trokut dalje može služiti za određivanje karakteristika preostalih tanova.



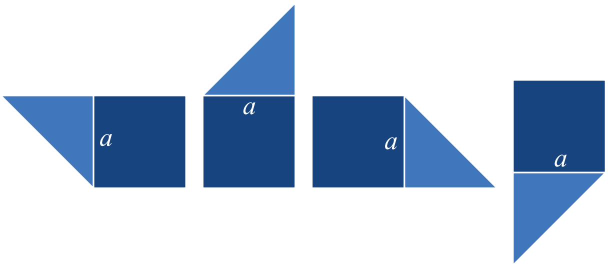
Slika 7. Duljine stranica malog tan trokuta

Potpuno analogno utvrđuje se da su veliki tan trokuti međusobno sukladni, jednakokračni i pravokutni, a uspoređivanjem njegovih stranica sa stranicama malog tan trokuta lako se pokaže da su katete velikog tan trokuta duljine $2a$ (slika 8a)), a hipotenuza je duljine $2b$ (slika 8b)). Srednji tan trokut također je jednakokračan i pravokutan, što se jednostavno provjerava uspoređivanjem sa stranicama i kutovima malog tan trokuta. Katete srednjeg tan trokuta su duljine b (slika 8c)), a hipotenuza je duljine $2a$ (slika 8d)).



Slika 8. Duljine stranica velikog i srednjeg tan trokuta

Na sličan se način može pokazati da su tan četverokuti zapravo kvadrat i paralelogram. Naime, uspoređivanjem stranica malog tan trokuta i jednog četverokuta utvrđuje se da su sve stranice tog četverokuta jednakih duljina i to duljine katete a (slika 9).

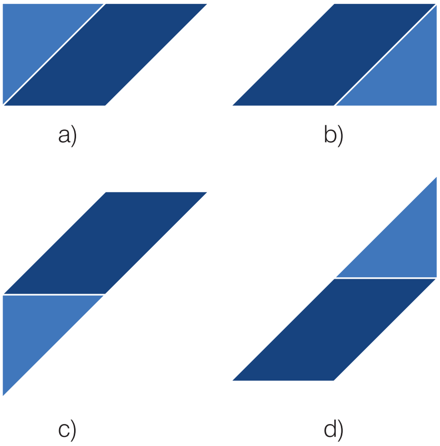


Slika 9. Duljine stranica tan kvadrata

Uspoređivanjem kutova tog četverokuta s pravim kutom malog tan trokuta utvrđuje se da promatrani četverokut ima sve kutove prave (slika 10). Dakle, prema definiciji: *Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice jednakih duljina i svi kutovi pravi* može se zaključiti da se radi o tan kvadratu.

Slika 10. Kutovi tan kvadrata

Uspoređivanjem stranica malog tan trokuta i drugog četverokuta pokaže se da su dvije nasuprotne stranice četverokuta podudarne s katetama malog tan trokuta te su one duljine a (slika 11c) i 11d)), a preostale dvije su podudarne s hipotenuzom te su one duljine b (slika 11a) i 11b)). Prema poučku: *Ako su u četverokutu nasuprotne stranice jednakih duljina, onda je taj četverokut paralelogram*, može se zaključiti da se radi o tan paralelogramu i to općem obliku jer je $a \neq b$.

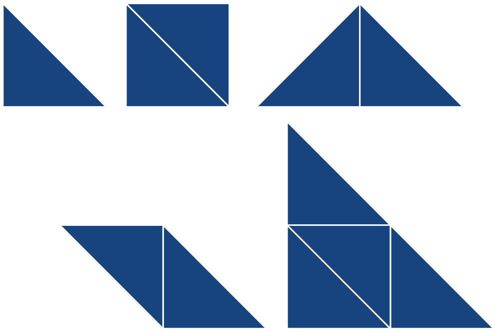


Slika 11. Duljine stranica tan paralelograma

Uspoređivanjem kutova paralelograma s kutovima malog tan trokuta lako se pokaže da su šiljasti kutovi paralelograma veličine $45°$ (npr. komplementarni kutovi na slici 11a)), a tupi kutovi su veličine $135°$ (npr. susjedni kutovi na slici 11b)).

Površine tanova

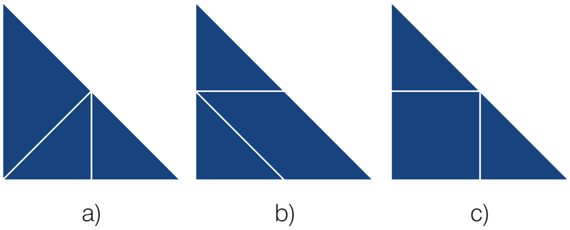
Kako bismo odredili mjere površina tanova, uzmimo da je mjera površine malog tan trokuta P. Uspoređivanjem ostalih tanova s malim tan trokutom jednostavno se provjerava da se srednji trokut, kvadrat i paralelogram u potpunosti mogu prekriti dvama malim tan trokutima, bez praznina i bez preklapanja, pa je mjera njihovih površina $2P$, dok se veliki trokut u potpunosti može prekriti četirima



Slika 12. Mjerenje površine tanova s pomoću malog tan trokuta

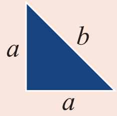
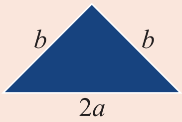
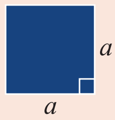
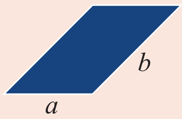
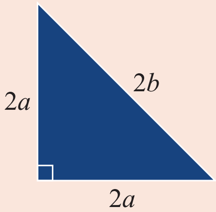
malim tan trokutima te je mjera njegove površine $4P$ (slika 12).

Kako u tangram slagalici ne postoje četiri mala trokuta već samo dva, služeći se preostalim tanovima može se uočiti da se veliki tan trokut još može u potpunosti prekriti: dvama malim i jednim srednjim tan trokutom (slika 13a)), dvama malim tan trokutima i jednim tan paralelogramom (slika 13b)) te dvama malim tan trokutima i jednim tan kvadratom (slika 13c)). Iako veliki trokut fizički ne možemo prekriti dvama srednjim trokutima, dvama kvadratima niti dvama paralelogramima, služeći se svojstvom tranzitivnosti realnih brojeva, može se konstatirati da je veliki tan trokut dvostruko veće površine od površine srednjeg trokuta, od površine kvadrata i od površine paralelograma.



Slika 13. Mjerenje površine velikog tan trokuta

Nakon provedenog istraživanja i uočavanja opisanih geometrijskih karakteristika tanova, svi izvedeni zaključci mogu se pregledno složiti u jednu tablicu kako bi se lakše mogli koristiti u daljnjem radu i istraživanju, a mogu se dodati i nova svojstva, npr. opsezi tanova (tablica 1).

Naziv	Geometrijske karakteristike	Duljine stranica	Mjera površine	Opseg
mali tan trokut (2)	sukladni jednakokračni pravokutni trokuti		P	$2a + b$
srednji tan trokut	jednakokračni pravokutni trokut		$2P$	$2a + 2b$
tan kvadrat	sve stranice jednakih duljina, svi kutovi pravi		$2P$	$4a$
tan paralelogram	nasuprotne stranice jednakih duljina, nasuprotni kutovi jednakih veličina		$2P$	$2a + 2b$
veliki tan trokut (2)	sukladni jednakokračni pravokutni trokuti		$4P$	$4a + 2b$

Tablica 1. Osnovne karakteristike tanova

Sada se na temelju podataka iz tablice mogu uočiti još neka svojstva. Na primjer, srednji trokut i paralelogram imaju jednake opsege i mjere površina, a njihovi oblici su različiti što je dobar kontraprimjer kad se obrađuju sukladni likovi. Naime, sukladni likovi imaju jednake opsege i mjere površina, ali obrat ne vrijedi: ako likovi imaju jednake opsege i mjere površina, oni ne moraju biti sukladni. Iz toga je vidljivo da sukladnost likova ne ovisi o mjeri, već o obliku površine.

Aktivnost 3. Različite vrste likova

Zanimljivost i korisnost tangram slagalice je i u tome što se s pomoću istih tanova mogu oblikovati različite figure i geometrijski likovi, ali se također i od različitih tanova mogu oblikovati sukladni likovi.

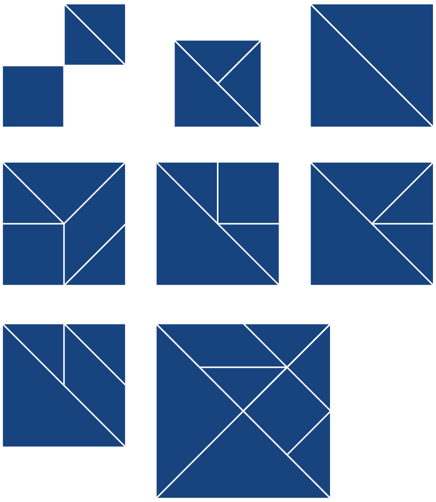
Površine svih tangram likova, bez obzira na oblik, jednakih su mjera jer su oblikovani od istih sedam tanova. Prema tablici 1, mjera svakog tangram lika je $16P$, gdje je P mjera površine malog tan trokuta. Nadalje, među geometrijskim tangram likovima neki mogu biti pravilni, a drugi ne, neki su konveksni dok drugi nisu itd.

Oblikovanje istog lika različitih veličina

Jedna od početnih aktivnosti s tangramom može biti i istraživanje na koje se sve načine može oblikovati jedan te isti lik: kvadrat, trokut, trapez itd. Zatim, može se istražiti na koliko se različitih načina može oblikovati određeni lik zadane površine i sl.

Primjer. Kvadrat

Kvadrat se može prikazati s pomoću jednog, dva, tri, četiri, pet i sedam tanova, ali ne i sa šest tanova. Ako je mali tan trokut površine P, onda se na dva načina može prikazati kvadrat površine $2P$, samo na jedan način kvadrat površine $4P$ i $16P$, a na pet različitih načina se može oblikovati kvadrat površine $8P$. Dakle, među oblikovanim kvadratima ima sukladnih, a svi su međusobno slični (slika 14).

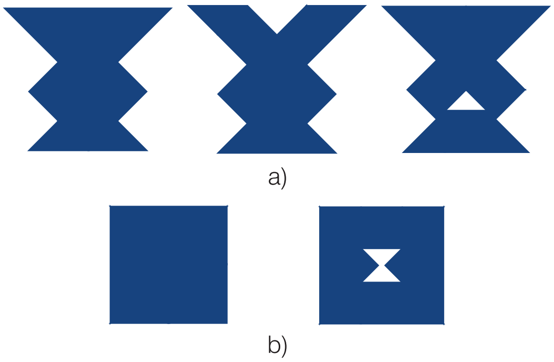


Slika 14. Svi kvadrati izgrađeni od tanova

Na sličan se način mogu istraživati načini slaganja trokuta, pravokutnika, paralelograma, trapeza itd., u trenutku kada se određeni lik obrađuje u nastavi. Aktivnost se može provoditi sa svim uzrastima.

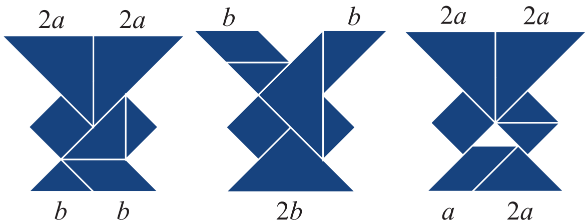
Paradoksi tangrama

Postoji još jedna posebnost slagalice tangram: od svih sedam tanova mogu se prividno oblikovati različite figure tangrama od kojih je jedna podskup druge iako su njihove površine jednakih mjera. Takve figure tangrama nazivaju se **paradoksi tangrama** (slika 15). Na primjer, na slici 15a), prikazane su tri vaze koje na prvi pogled izgledaju kao da su jednakih dimenzija (širina i visina), s tim da u drugoj i trećoj vazi (gledajući slijeva nadesno) nedostaje jedan dio u odnosu na prvu. Kako su sve tri vaze oblikovane od istih sedam tanova, njihove su površine jednakih mjera pa se postavlja pitanje: kako je to moguće?



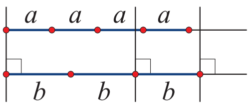
Slika 15. Paradoksi tangrama

Oblikovanjem prikazanih vaza i služeći se uvedenim dimenzijama tanova (tablica 1), može se zaključiti da njihove dimenzije ipak nisu jednake kao što to izgleda na prvi pogled (slika 16).



Slika 16. Dimenzije i raspored tanova vaza

Naime, gornji otvor prve i treće vaze je $4a$, a otvor druge vaze je $3b$ (slika 16, slijeva nadesno) te se pokaže da je $3b > 4a$, tj. srednja vaza je šireg otvora u odnosu na preostale dvije (slika 17). Zatim, postolje prve i druge vaze je duljine $2b$, a postolje treće vaze je duljine $3a$ (slika 16, slijeva nadesno) te se pokaže da je $2b < 3a$ (slika 17), odnosno treća vaza je šireg postolja u odnosu na prve dvije. Nadalje, jednostavnim se računom dobiva da je visina prve vaze $2a + b$, visina druge vaze je $\frac{5b}{2}$, a visina treće vaze je $\frac{7a}{2}$ te vrijedi: $\frac{5b}{2} > \frac{7a}{2} > 2a + b$, tj. vaze se razlikuju i po visini.

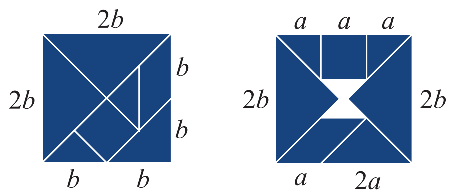


Slika 17. Uspoređivanje zbroja dužina (geometrijski)

Ako se ova aktivnost radi prije osmog razreda, uspoređivanje se može vršiti geometrijski, služeći se aksiomom o prenošenju dužine (slika 17). No, već od osmog razreda kroz ove aktivnosti s tangramom mogu se postavljati tvrdnje i postupno razvijati proces dokazivanja. Na primjer, vrijedi da je $2b < 3a$ jer primjenom Pitagorina poučka nejednakost prelazi u $2a\sqrt{2} < 3a$, odnosno $2\sqrt{2} < 3$, a nakon kvadriranja se dobiva: $8 < 9$. Sada se na temelju provedene analize može postaviti tvrdnja: Ako je a duljina kateta, a b duljina hipotenuze jednakokračnog pravokutnog trokuta, onda vrijedi: $2b < 3a$. Dokaz se može provesti direktno, ali i indirektno kontradikcijom.

Slično, na slici 15b), prikazana su dva četverokuta koja na prvi pogled izgledaju kao sukladni kvadrati, s tim da u drugom nedostaje dio u sredini. No, kako su oba četverokuta oblikovana od istih sedam tanova, njihove površine su jednakih mjera pa se opet može postaviti pitanje: kako je to moguće? Ovaj je izazov postavljen i u [1].

Obrazloženje leži u činjenici da prikazana dva četverokuta ipak nisu sukladna jer je četverokut slijeva kvadrat stranice duljine $2b$, a četverokut zdesna je pravokutnik duljine $3a$ i širine $2b$ (slika 18), služeći se pri tome uvedenim dimenzijama tanova (tablica 1), pri čemu vrijedi: $2b < 3a$.



Slika 18. Dimenzije s rasporedom tanova kvadrata i pravokutnika

Postoje i razni drugi paradoksi tangrama, a nakon malo vježbe i sami učenici mogu pokušati postaviti svoj paradoks tangrama. Postojanje tangram paradoksa ukazuje na činjenicu da se slike ne smiju uzimati zdravo za gotovo, već ih treba kritički promatrati i analizirati, a tek onda o njima zaključivati te konačno, ono što tvrdimo i dokazati.

Opisani procesi otkrivanja, postavljanja i dokazivanja uočenih zakonitosti odlika su matematičkog mišljenja i dobar model učenja matematike. Na koji će se način provesti ovisi prije svega o znanju i vještinama samog nastavnika, a zatim o uzrastu i predznanjima učenika.

U drugom dijelu istoimenog rada opisat će se još tri nove grupe aktivnosti, uz proširenje treće grupe iz ovog rada.

Zaključna promišljanja

Drevna kineska slagalica tangram može biti vrlo korisno didaktičko sredstvo u nastavi matematike, a posebno u nastavi geometrije, ako se koristi na primjeren način. U tu svrhu, upoznavanje sa slagalicom tangram može započeti ležerno slaganjem raznovrsnih figura, ali daljnje razvijanje aktivnosti s tangramom ne bi smjelo biti nasumično niti instinktivno već promišljeno i sustavno, temeljeno i na vlastitom iskustvu.

Razna obrazovna istraživanja (vidjeti [2], [4]) ukazuju na to da učenici kroz tangram aktivnosti aktivno sudjeluju u procesu učenja, postaju sigurniji u svoja znanja te smanjuju strah od matematike. Uvažavajući rezultate tih obrazovnih istraživanja, otvara nam se mogućnost jednog drukčijeg pristupa u nastavi matematike koji dokazano pridonosi uspješnijem učenju.

LITERATURA

1/ B. Dakić (2009.): Matematičke igračke, *Matematika i škola 62*, str. 87–90.

2/ A. Kavajin (2016.): *Tangram i njegova primjena*, (Diplomski rad), Filozofski fakultet u Splitu.

3/ Tangram Channel: *Legend of the Tangram*. Preuzeto s `http://www.tangram-channel.com/legend-of-the-tangram/` (13. 5. 2016.)

4/ S. Olkun, N. B. Sinoplu i D. Deryakulu (2005.): Geometric Explorations with Dynamic Geometry Applications based on van Hiele Levels, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning* (str. 1–12). Preuzeto s `http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm` (10. 6. 2010.).

5/ J. Slocum (2003.): *Tangram: The World's First Puzzle Craze*, preuzeto s `http://www.indiana.edu/~liblilly/collections/overview/puzzle_docs/Tangram-Worlds_First_Puzz_Craze.pdf` (13. 12. 2015).