

Tko je prvi... znao riješiti linearnu jednadžbu?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Ako postoji ikoji matematički pojam koji, osim brojeva i formula, prosječna osoba povezuje s matematikom, to je zasigurno pojam jednadžbe. Nerijetko se taj izraz koristi nepravilno, bilo za numeričke identitete ili pak za pravila kojima zadajemo funkcije.

Među raznim vrstama jednadžbi s kojima se susrećemo u matematici, svaka osoba sa završenom osnovnom školom zasigurno je učila rješavati *linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom*. Obično kažemo da su to jednadžbe oblika

$$ax = b,$$

pri čemu čak i mi, precizni matematičari, podrazumijevamo dvije konvencije:

- a , b i x su oznake za brojeve, pri čemu je x nepoznanica, dok su a i b zadani koeficijenti (o porijeklu tih oznaka pisali smo u MiŠ-u broj 87)
- radi se o "sređenom" obliku jednadžbe (linearna jednadžba je ona koja se dozvoljenim operacijama može svesti na gornji oblik).

No, linearne jednadžbe i njihovo rješavanje mnogo su stariji od sustava simbola kojima ih danas zapisujemo. Zapravo, najraniji dokazi ljudskog bavljenja matematikom, daleko prije nego se išta dokazivalo, uz osnovne geometrijske račune uključuju i rješavanje linearnih jednadžbi.

Konkretno, tu treba istaknuti dvije kulture iz kojih potječu najstariji sačuvani dokazi matematičkog razmišljanja: sumersko-babilonsku i staroegipatsku. Iz sumersko-babilonskog razdoblja sačuvane su mnoge glinene pločice s matematičkim zadacima (ponajviše njih iz doba starobabilonskog carstva

oko 1900. – 1600. pr. Kr., vidi sliku 1), dok su iz staroegipatskog razdoblja sačuvani papirusi, od kojih su najvažniji Rhindov i Moskovski papirus, koji su oba zbirke matematičkih zadataka iz prve polovice 2. tisućljeća pr. Kr. Tim je izvorima zajedničko da (između ostalog) sadrže zadatke riječima koje bismo danas nazivali zadacima s linearnim jednadžbama te da navode i njihova rješenja, ali bez pokušaja argumentacije ili generalizacije postupka. Glavne su razlike u računskim postupcima kojima su dobivana rješenja jer se u babilonsko doba koristio pozicijski brojevni sustav (bez nule) temeljen na kombinaciji baza 10 i 60, dok su Egipćani u to doba koristili aditivni nepozicijski dekadski sustav.



Slika 1. Vjerojatno najpoznatija tablica iz babilonskog doba, Plimpton 322 s pitagorejskim trojkama (izvor: Wikipedia, slika objavljena kao *public domain*)

Primjerice, na jednoj babilonskoj pločici (vidi [1]) nalazimo zadatak (u slobodnom prijevodu):

Uzete su dvije trećine od dvije trećine neke količine ječma, dodano je 100 jedinica ječma i dobivena je izvorna količina. Količina ječma?

Rješenje na pločici kaže da treba izračunati **40 puta 40** da bi se dobilo **26 40**. To treba oduzeti od 1 da se dobije **33 20**. U tablici treba pronaći recipročnu vrijednost od **33 20** da se dobije **1 48**. Naposljetku treba pomnožiti **1 48** s **1 40** da se dobije **3**.

Danas to rješenje djeluje kriptično jer bismo zadanu jednadžbu zapisali kao

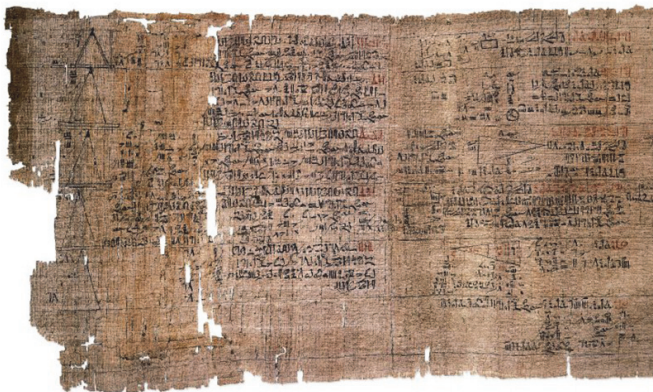
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x + 100 = x$$

i riješili ju tako da svedemo na oblik $\frac{5x}{9} = 100$,

odnosno $x = \frac{990}{5} = 180$.

Prvi problem s razumijevanjem rješenja iz tablice je što babilonski pisar nije koristio moderni dekadski sustav s nulom. Tako **40** znači **40 puta neka potencija od 60** i iz konteksta slijedi da je ovdje u prvoj rečenici $40 = 40 \cdot 60^{-1} = \frac{2}{3}$. Dakle, prvi korak

postupka je izmnožiti $\frac{2}{3}$ s $\frac{2}{3}$, što i mi radimo. Rezultat je naveden kao **26 40**, pod čime mislimo **26 puta neka potencija od 60 plus 40 puta neka niža potencija od 60** (nije postojala nula ni kao broj ni kao znamenka tako da se stvarna vrijednost znamenaka dobiva iz konteksta). Babilonci su raspolagali tablicama kvadratnih i recipročnih brojeva (zbog velike baze 60 to je bitno olakšavalo računske postupke). Uz malo razmišljanja lako je dešifrirati da je **26 40** ovdje $26 \cdot 60^{-1} + 40 \cdot 60^{-2} = \frac{4}{9}$. U sljedećem koraku to se oduzima od 1, što odgovara našem računanju koeficijenta uz x u sredenom



Slika 2. Dio Rhindovog papirusa (izvor: Wikipedia, slika objavljena kao public domain)

obliku jednadžbe. Znamo da je to $\frac{5}{9}$, dakle vrijedi $33\ 20 = 33 \cdot 60^{-1} + 20 \cdot 60^{-2} = \frac{5}{9}$. Vjerujemo da je sada lako shvatiti i ostatak postupka i zaključiti da je babilonsko rješenje **3** zapravo $3 \cdot 60^1$.

Za usporedbu, u Moskovskom papirusu (datiranom oko 1850. g. pr. Kr.) i Rhindovom papirusu¹ (iz otprilike 1650. g. pr. Kr., slika 2) linearne jednadžbe uglavnom se pojavljuju u obliku "aha-zadataka" i "pefsu-zadataka". Prvi su nazvani tako jer uglavnom započinju riječju "aha" koja se koristi kao naziv za rezultat, a radi se o zadacima koji se poput prethodno navedenog tiču nekih količina. *Pefsu*-zadaci su pak zadaci koje bismo danas zvali zadacima s omjerima, a sam *pefsu* je izraz za omjer količine dobivenog proizvoda u odnosu na utrošenu sirovinu (npr. broj komada kruha u omjeru prema utrošenom volumenu žita). Navodimo po jedan primjer za svaki, oba iz Rhindova papirusa (vidi [2]).

24. zadatak iz Rhindova papirusa:

Količina i njezina 1/7 skupa daju 19. Koja je količina?
(Dakle, ovo je linearna jednadžba $x + \frac{1}{7}x = 19$).

¹ Rhindov papirus je najstariji poznati matematički tekst za kojeg se zna ime autora. Bio je to pisar Ahmes, koji sam navodi da je zapisao starije zadatke u svrhu školovanja raznih državnih službenika.

Ahmes kao rješenje piše:

$$\begin{array}{r} \text{Pretpostavi 7.} \\ \backslash 1 \quad \quad 7 \\ \backslash 1/7 \quad \quad 1 \\ \text{Ukupno 8.} \end{array}$$

Koliko puta 8 treba biti pomnožen da se dobije 19, toliko puta 7 treba biti pomnožen da se dobije traženi broj.

$$\begin{array}{r} 1 \quad \quad 8 \\ \backslash 2 \quad \quad 16 \\ 1/2 \quad \quad 4 \\ \backslash 1/4 \quad \quad 2 \\ \backslash 1/8 \quad \quad 1 \\ \text{Ukupno } 2 \frac{1}{4} \frac{1}{8} \\ \backslash 1 \quad \quad 2 \frac{1}{4} \frac{1}{8} \\ \backslash 2 \quad \quad 4 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \\ \backslash 4 \quad \quad 9 \frac{1}{2} \\ \text{Količina je } 16 \frac{1}{2} \frac{1}{8} \\ 1/7 \quad \quad 2 \frac{1}{4} \frac{1}{8} \\ \text{Ukupno 19.} \end{array}$$

Vjerujemo da svi uočavate da Ahmes koristi metodu poznatu kao *regula falsi* i nju koristi i u drugim takvim zadacima, a tako je i u Moskovskom papirusu. Vidimo, također, tipično staroegipatsko zapisivanje razlomaka kao zbrojeva razlomaka s brojnikom 1. Jedino što vjerojatno ne razumijete je tablični račun. Naime, stari su Egipćani dva broja dijelili kroz dva stupca tako da u prvom stupcu udvostručujemo (ili raspolavljamo) brojeve krenuvši

od 1, a u drugom stupcu paralelno udvostručujemo (ili raspolavljamo) djeljitelj. Kad u tom stupcu premašimo djeljenic, označimo (mi smo to učinili sa $\backslash$) retke za koje u drugom stupcu dobijemo zbroj jednak djeljniku. Zbrajanjem odgovarajućih članova prvog stupca dobiva se količnik.

Naposlijetku, evo primjera *pefsu*-zadatka.

69. zadatak iz Rhindova papirusa:

Primjer razmjene komada jednog kruha za drugu vrstu kruha. Pretpostavi da ti je rečeno, 100 komada kruha s pefsuom 10 treba se razmijeniti za neki broj kruha s pefsuom 45. Koliko će ih biti?

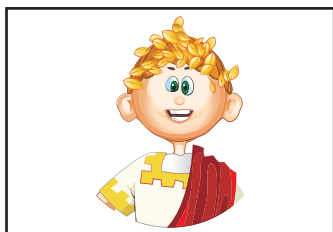
Rješenje koje Ahmes navodi je sljedeće: Nađi višak od 45 povrh 10. To je 15. Pomnoži 10 tako da dobiješ 35. To je $3\frac{1}{2}$. Pomnoži 100 s $3\frac{1}{2}$. To je 350. Pribroji 100. To daje 450. Onda reci da se 100 komada kruha pefsua 10 razmijeni za 450 komada kruha pefsua 45.

Nakon što smo sad vidjeli početke rješavanja linearnih jednačbi, za sljedeća dva nastavka ove rubrike najavljujemo prva rješenja kvadratnih i kubnih jednačbi.

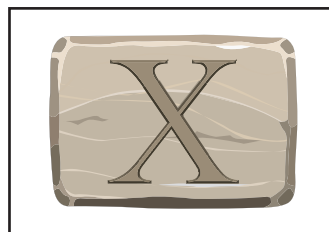
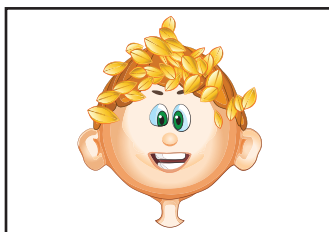
LITERATURA

1/ An Overview of Babylonian Mathematics. Dostupno na <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Babylonian-mathematics.html>.

2/ A. B. Chace, (1927.): *The Rhind Mathematical Papyrus*, MAA, Oberlin



Zašto je Rimljanima algebra bila lagana?



Jer su uvijek znali da je x jednako 10.