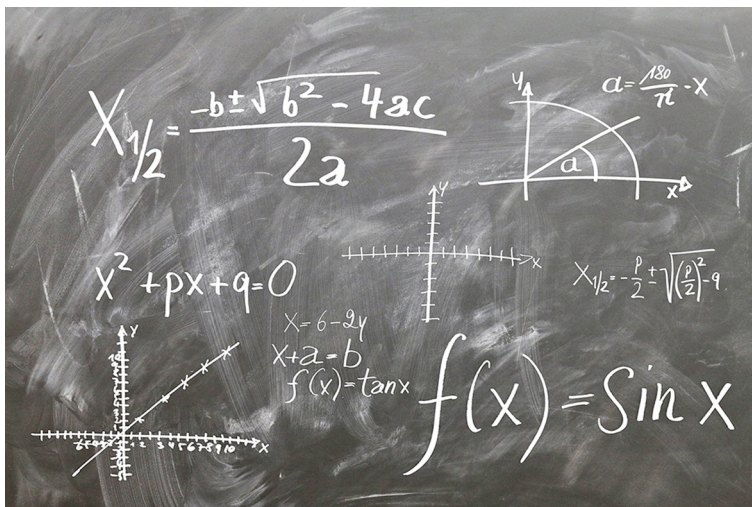


Na drugi način

Sanja Sruk, Zagreb

U svakodnevnoj borbi s vremenom, planovima i programima, testovima, ocjenama... često nemamo dovoljno vremena detaljnije se posvetiti nekom zadatku (jer gradiva je tako puno, a trebat će im na maturi!), pa propuštamo dati učenicima dragocjenu priliku

da isti zadatak pokušaju riješiti na različite načine. Započela je kurikularna reforma i u njoj se to mijenja, ali ta promjena ponajviše ovisi o nastavnicima, njihovoj kreativnosti, educiranosti i motiviranosti. Uvriježeno je mišljenje da je najbrži i najelegantniji način ujedno i najbolji, no je li doista tako?



Što će to meni u životu?

Da, da... svima nama su učenici puno puta postavili to pitanje i teško je dati odgovor jer je i nama jasno da im vrlo vjerojatno baš nikada u životu neće zatrebati Talesov poučak, adicijske formule, pa čak ni problemski zadatci poput "Majka je prije pet godina bila osam puta starija od kćeri, a...". Ali ono što mi vrlo dobro znamo, a učenici toga nisu svjesni, jest da matematika, osim što je glavno oruđe u gotovo svim znanostima i inženjerstvu, razvija koncentraciju, logičko razmišljanje, analitičnost, preciznost, kreativnost i druge karakteristike koje su itekako poželjne u svakoj struci, a od velike su koristi i u svakodnevnom životu.

Kako potičemo razmišljanje i kreativnost

Među nematematičarima prevladava mišljenje da je matematika suhoparna i da u njoj nema prostora za kreativnost. Tu je sve jednoznačno određeno, postoje formule, algoritmi, $2+2$ uvijek je 4. E, nije! Matematika pruža velike mogućnosti za razvijanje ne samo logičkog nego i kreativnog razmišljanja, a nastavnici matematike trebaju iskoristiti te mogućnosti. Kreativan učenik pronalazi drukčija, originalna rješenja. Osnovni preduvjet za razvoj stvaralačkog mišljenja je samostalan rad, a koliko će učenik biti zainteresiran za samostalan rad ovisi o njegovoj motivaciji. Sama pak motivacija ovisi

o više faktora, a jedan od njih je svakako nastavnik, koji ju svojom osposobljenošću i načinom rada te pozitivnim reakcijama na učeničku kreativnost, može znatno povećati.

Jedna od najboljih metoda koje potiču samostalno otkrivanje je heuristički razgovor, dijalog u kojemu nastavnik pomoću kratkih, logički povezanih, nesugerirajućih, pažljivo odabranih pitanja vodi učenika prema rješenju. Tako učenik postaje subjekt nastavnog procesa, samostalno dolazi do rješenja, a takvo je učenje najkvalitetnije i najtrajnije i tome se teži u suvremenom pristupu nastavi matematike.

Svima dobro poznati profesor Branimir Dakić objavio je daleke 1982. godine u časopisu *Matematika* članak *O kreativnosti u nastavi matematike*. Unatoč proteklim godinama, članak nije izgubio svoju aktualnost jer je kreativnost svezremenska, a "kreativan nastavnik je originalan u svojim idejama, osjetljiv i komunikativan, srdačan i spontan, marljiv, strpljiv i uporan, a nadasve maštovit." (B. Dakić)

Jedan od većih problema je i kako postići trajnost znanja. Prema jednom istraživanju iz 2016. godine 60 % japanskih dvadesetogodišnjaka ne zna izračunati koliko je $9 - 3 : \frac{1}{3} + 1$. Uz tu vijest objavljen je i videozapis u trajanju od čak četiri minute i trinaest sekundi u kojem se objašnjava postupak rješavanja. To su poražavajući rezultati jer bi barem izvođenje elementarnih računskih operacija trebalo ostati kao trajno znanje.

Radim u općoj gimnaziji i, kad god je moguće, nakon što riješimo neki zadatak, pitam učenike imaju li neku drugu ideju kako bismo mogli riješiti taj zadatak. Istina, većina šuti, ali često čujem veoma zanimljive prijedloge. Međutim, nakon što riješe zadatak na dva ili više načina, učenici prvih razreda postavljaju mi pitanje: "A na koji način da mi rješavamo u zadaci i na testu?" Činjenica je da mnogi vole "recepte" kako bi smanjili umne napore i sa što manje truda dobili dobru ocjenu, ali je također istina da su mnogi u osnovnoj školi morali rješavati zadatke isključivo na način kako im je pokazao nastavnik/nastavnica.

Evo dvaju konkretnih primjera.

Primjer 1 (5. razred): Poredaj po veličini brojeve 7.07, 7.007, 7.707, 7, 7.7 počevši od najvećega.

Učenica točno rješava zadatak: 7.707, 7.7, 7.07, 7.007, 7, ali gubi pola boda jer je profesorica tražila da, kao što je ona radila na satu, navedene brojeve prvo zapišu u obliku 7.070, 7.007, 7.707, 7.000, 7.700 pa tek onda usporede.

Primjer 2 (6. razred): Izračunaj površinu sobe kojoj je duljina 5.27 m, a širina 4.3 m.

Učenica radi skicu i računa $P = 5.27 \cdot 4.3 = 22.661 \text{ m}^2$, ali nije napisala formulu $P = a \cdot b$. Bod manje!

Zašto? Prva učenica očito zna uspoređivati decimalne brojeve i bez pomoćnih nula, a druga zna formulu za površinu pravokutnika jer ju je uspješno primijenila. Ovdje nije pokazana nekakva kreativnost učenika, ali ovakvim reakcijama nastavnika ona se nikad ni neće razviti.

Zbog toga su gotovo cijelo prvo polugodište mnogi gimnazijski prvašići iznenađeni što sada mogu rješavati zadatke na bilo koji način, štoviše, potiče ih se da pronalaze drukčije načine rješavanja.

Zašto rješavati zadatke na različite načine

Razmišljanje o drugim načinima rješavanja razvija i logičko razmišljanje i analitičnost i kreativnost, a upravo to nam je i cilj postići kod učenika. Ne treba to biti neka fantastična ideja, dovoljno je da je drukčija jer znači da je učenik promišljao. I možemo se nadati da će i u budućnosti, kad naide na nekakav problem, promišljati kako ga riješiti, postoji li drugi način, koji način je bolji itd.

Evo nekoliko jednostavnih primjera iz gimnazijskih zbirki zadataka.

Zadatak 1: Riješi sustav:

$$x + y = 3$$

$$y + z = 5$$

$$x + z = 4.$$

Učenici uglavnom rješavaju klasično, iz jedne jednadžbe izraze jednu nepoznanicu pa uvrste u druge dvije jednadžbe. Rijetko koji učenik odmah zaključi da bi sve tri jednadžbe mogao zbrojiti

$$2x + 2y + 2z = 12 : 2$$

$$x + y + z = 6,$$

a zatim

$$x = 6 - (y + z) = 6 - 5 = 1,$$

$$y = 6 - (x + z) = 6 - 4 = 2,$$

$$z = 6 - (x + y) = 6 - 3 = 3.$$

Sličan primjer imamo i u stereometriji.

Zadatak 2: Površine strana kvadra su 20 cm^2 , 28 cm^2 i 35 cm^2 . Koliki je obujam kvadra?

$$ab = 20$$

$$ac = 28$$

$$bc = 35$$

Iako je najlogičnije jednadžbe pomnožiti pa korjenovati, većina će opet krenuti klasično. Učenik koji jednadžbe množi, na ovom jednostavnom primjeru pokazuje svoju kreativnost i razmišljanje izvan okvira "receptata".

Zadatak 3: Ako su -1 i 2 nul-točke polinoma drugog stupnja, a najveća vrijednost polinoma je 3 , odredi taj polinom.

Polinom drugog stupnja može se zapisati na različite načine:

$$1. f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$2. f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

$$3. f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Iako znaju sva tri oblika, učenici najviše koriste prvi. Zato je dobro riješiti zadatak na sva tri načina da vide koji je oblik u ovom slučaju praktičniji. Većina zadatak rješava postavljanjem sustava

$$a - b + c = 0$$

$$4a + 2b + c = 0$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = 3.$$

Neki se ipak sjetu koristiti simetričnost parabole, pa odmah izračunati $x_0 = \frac{1}{2}$, a zatim s pomoću drugog zapisa dobiti koeficijent a .

Sljedeći primjer smatram osobito vrijednim:

Zadatak 4: Dokaži da su točke $A(2, 1)$, $B(3, 4)$ i $C(5, 10)$ kolinearne.

Zadatak se može riješiti na više načina.

$$1. |AB| + |BC| = |AC|$$

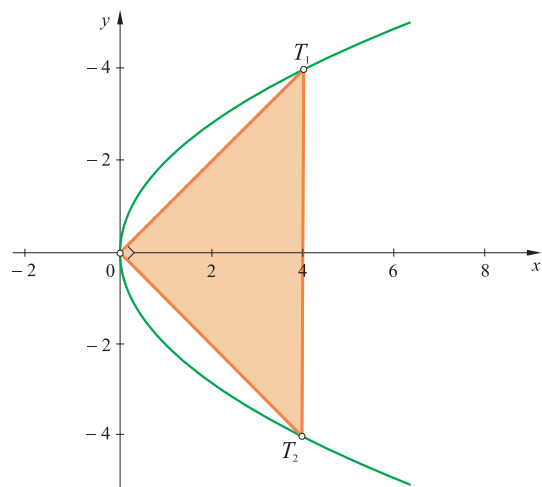
$$2. P_{\triangle ABC} = 0$$

3. Naći jednadžbu pravca kroz dvije točke pa uvrštavanjem provjeriti da i treća pripada tom pravcu.

$$4. \vec{AB} = k\vec{AC}$$

Puno potrošenog vremena, ali i puno ponovljenog gradiva.

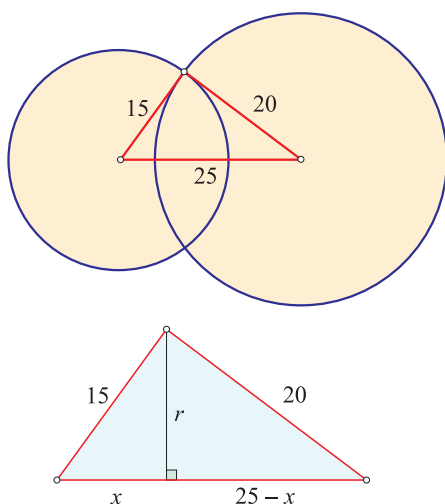
Zadatak 5: U parabolu $y^2 = 2px$ upisan je jednakokrani pravokutni trokut s vrhom pravog kuta u tjemenu parabole i hipotenuzom duljine 8 . Kolika je površina toga trokuta?



Nakon crtanja skice učenici odmah uočavaju da su ordinate vrhova na hipotenuzi 4 i -4 , ali apscise nalaze na različite načine. Jedni uočavaju da je taj trokut pola kvadrata kome je dijagonala 8 pa su

tražene apscise 4. Drugi primjećuju da su pravci na kojima leže katete simetrale I. i III., odnosno II. i IV. kvadranta, a kako točke na tim simetralama imaju koordinate (x, x) , odnosno $(x, -x)$, $x = 4$. Treći gledaju gornju polovicu trokuta. To je pravokutni trokut sa šiljastim kutom 45° . Primjenom funkcije tg nalaze $x = 4$, a dalje je lako izračunati površinu.

Zadatak 6: Središta dviju sfera udaljena su 25 cm. Odredi duljinu krivulje njihovog presjeka ako su im polumjeri dugački 15 cm i 20 cm.



Većina učenika i nakon crtanja skice teško uočava da je linija presjeka kružnica (pomaže usporedba sa spojenim mjehurima od sapunice), ali kada to uoče, jasno je da je polumjer visina trokuta sa stranicama 15, 20 i 25 cm. Do tog polumjera može se doći na različite načine, npr. rješavanjem sustava

$$\begin{aligned}x^2 + r^2 &= 15^2 \\(25 - x)^2 + r^2 &= 20^2,\end{aligned}$$

ili preko površine trokuta, kombinacijom Heronove formule i formule $P = \frac{av}{2}$.

I na kraju primjer pomalo neobičnog zaključivanja učenika osmog razreda u zadatku koji je težak i gimnazijalcima.

Zadatak 7: Ako dva stroja u 3 sata izrade 240 proizvoda, koliko će proizvoda napraviti tri stroja u 5 sati?

Možemo zaključivati da jedan stroj u tri sata napravi 120 proizvoda, u jednom satu onda napravi 40. Zato tri stroja u jednom satu naprave 120, a u pet sati 600 proizvoda.

Učenik je podatke zapisao ovako:

$$\begin{array}{ccc}2n & 3h & 240 \\3n & 5h & x\end{array}$$

pa računamo:

$$\begin{aligned}2n \cdot 3h &= 240 / : 6 \\nh &= 40 \\3n \cdot 5h &= x \\15nh &= x \\x &= 15 \cdot 40 = 600.\end{aligned}$$

Učeniku je takav način razmišljanja bio jedini logičan i prirodan.

“Izuzetna kreativnost”

Često smo svjedoci “izuzetne kreativnosti” naših učenika pa vidimo da je $\sqrt{x^2 - 9} = x - 3$ ili $\frac{\log 25}{\log 5}$

nakon kraćenja log postaje $\frac{25}{5}$. Kad bi još “skratili” petice u brojniku i nazivniku, čak bi dobili i točan rezultat 2. I “kraćenje” šestica i trojki u razlomku $\frac{163}{326}$

daje točan rezultat $\frac{1}{2}$. Vrhunac takve “kreativnosti” mogli smo vidjeti u *Miš*-u broj 4 u duhovitom članku *Optužujem!*. Radi se o pismu navodnog učenika koji se žali na svog profesora jer je riješio zadatak na pet različitih načina, svaki put s točnim rezultatom, a ipak je dobio negativnu ocjenu. Vjerujem da će vas njegova rješenja jednadžbe $4^x + 2^x = 6$ zabaviti i nasmijati pa ih prepisujem iz navedenog članka.

$$\begin{aligned}1. \text{ način} \quad & (4 + 2)^x = 6 \\& 6^x = 6 \\& x = 1\end{aligned}$$

2. način $4^x + 2^x = 6 / : 2$
 $2^x + 1^x = 3$
 $2^x + 1 = 3$
 $2^x = 2$
 $x = 1$

3. način $2 \cdot 2^x + 2^x = 6$
 $3 \cdot 2^x = 6$
 $2^x = 2$
 $x = 1$

4. način $\sqrt[3]{4^x + 2^x} = \sqrt[3]{6}$
 $\sqrt[3]{4^x} + \sqrt[3]{2^x} = \sqrt[3]{6}$
 $4 + 2 = \sqrt[3]{6}$
 $6^x = \sqrt[3]{6^x} = 6$
 $x = 1$

5. način $4^x + 2^x = 6 / \log$
 $\log 4^x + \log 2^x = \log 6$
 $x \cdot \log 4 + x \cdot \log 2 = \log 6$
 $x(\log 4 + \log 2) = \log 6$
 $x \cdot \log 6 = \log 6$
 $x = 1$

Zaključak

Najveći kreativci (oni pravi, ne pod navodnicima) u razredu nisu uvijek i najbolji matematičari. Znamo da najbolji inženjeri, ekonomisti, liječnici, pravnici... nisu uvijek bili odlikaši, ali su kreativni, znaju logički razmišljati i kritički se osvrnuti na dobivena rješenja. Ne hodaju utabanim stazama, nego krče nove putove, traže nove mogućnosti. Cilj nam je to postići i zato smo optimistično ušli u novu školsku godinu očekujući promjene nabolje. Naš najveći uspjeh je razviti kod naših učenika logički način razmišljanja i kreativnost jer će logaritamske jednačbe i tangente na kružnicu većina njih ionako vrlo brzo zaboraviti.

LITERATURA

- 1/ B. Dakić, (1982.): O kreativnosti u nastavi matematike, *Matematika*, 1 str. 20–25, Školska knjiga, Zagreb.
- 2/ I. Anzenik, (200.): Optužujem!, *Matematika i škola*, 4 str. 161–162, Element, Zagreb.

