

Tko je prvi... znao riješiti kvadratnu jednadžbu?

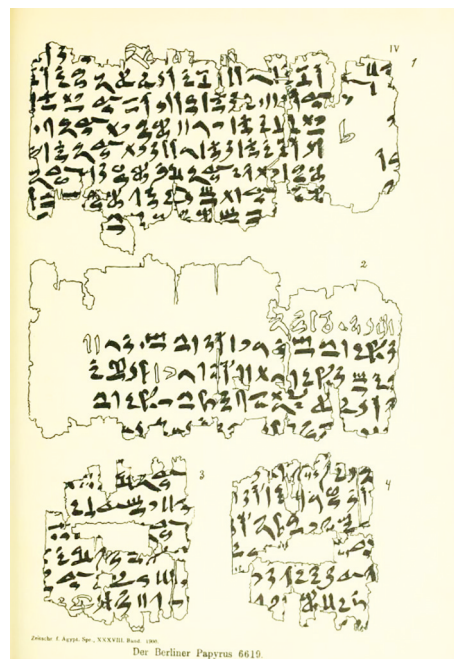
Franka Miriam Brueckler, Zagreb

U prošlom smo se broju zabavili pitanjem prve pojave linearnih jednadžbi i njihovih rješenja. Tada nismo, ali sad bismo rado, skrenuli pozornost na jedan detalj u naslovnom pitanju. Naime, znači li pitanje u naslovu “tko je prvi riješio *neku* kvadratnu jednadžbu?”, “tko je prvi riješio *neku netrivialnu* kvadratnu jednadžbu?” ili pak “tko je prvi dao opće rješenje kvadratnih jednadžbi?”. Matematički je jezik bitno precizniji od svakidašnjeg, pa naše pitanje može imati sva tri, a i još poneko, značenje kad bi se preciznije formuliralo. U ovom prilogu odgovorit ćemo na sve tri formulacije tog pitanja...

Slično kao i linearne jednadžbe, tako se i pojedinačne konkretne kvadratne jednadžbe (formulirane u obliku zadataka riječima, bez sustavnog pristupa i bez ikakvog oblika pojma jednadžbe) mogu naći već u staroegipatskim i babilonskim izvorima iz prve polovice 2. tisućljeća pr. Kr. Među ostalim, susreću se problemi poput određivanja stranice kvadrata poznate površine (problemi tipa $x^2 = c$), no nalaze se i kompliciraniji.

Konkretno, u tzv. **berlinskom papirusu 6619** (čuva se u berlinskom *Neues Museum*, a datiran je oko 1800. g. pr. Kr.) nalaze se primjeri vezani za rješavanje određenih kvadratnih jednadžbi [1]. Prvi zadatak berlinskog papirusa glasi:

Rečeno ti je da je površina kvadrata od 100 kvadratnih kubita jednaka površini dvaju manjih kvadrata, od kojih jedan ima stranicu koja je $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ stranice drugog.¹ Kolike su stranice tih dvaju kvadrata?



Slika 1. Početak papirusa Berlin 6619
(izvor: Wikipedia, slika objavljena kao public domain)

Ovaj, kao i još jedan sličan zadatak, riješeni su metodom *regula falsi* (iz pretpostavljenog rješenja podešavaju se točne vrijednosti).

U babilonskim se pak tablicama može naći više zadataka koji se svode na kvadratne jednadžbe tipa $x^2 \pm bx = c$ gdje je $b, c > 0$ [2, 3]. Primjerice, u tablici koda **BM13901** (čuva se u londonskom *British Museumu*) nalazi se zadatak:

Zbrojio sam površinu i stranicu kvadrata i dobio $\frac{3}{4}$.

Ovaj bismo zadatak danas zapisali kao jednadžbu $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

doc. dr. sc. Franka Miriam Brueckler, Zavod za matematičku analizu, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, bruckler@math.hr

¹ Stari su Egipćani (pozitivne) razlomke prikazivali kao zbrojeve razlomaka s brojnikom 1.

Rješenje je dano kako slijedi (u zagradama navodimo opći slučaj u današnjim oznakama):

Zapiši 1	(zapiši b)
$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$	(izračunaj $\frac{b}{2}$)
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	(izračunaj $\left(\frac{b}{2}\right)^2$)
$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$	(izračunaj $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = D$)
To je 1^2	$\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \sqrt{D^2}\right)$
$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\left(x = \sqrt{D} - \frac{b}{2}\right)$

Kad vidite ovaj postupak, zasigurno shvaćate zašto se nekad kaže da su Babilonci otkrili formulu za rješenje kvadratne jednačbe. Ipak, treba imati na umu da niti su Babilonci imali formule, niti postoje dokazi o svijesti o općem postupku, a još manje opravdanju istog. Također, uočavamo da su u obzir dolazili – i tako će ostati sve do renesanse – samo pozitivni koeficijenti i pozitivna realna rješenja.

Iz prethodnog zaključujemo: prva rješenja određenih, ne samo trivijalnih, kvadratnih jednačbi stara su gotovo 4000 godina i potječu od nepoznatih autora egipatskog Srednjeg kraljevstva i prve babilonske dinastije, no ni u jednoj od tih starih kultura nema pojma jednačbe niti općeg postupka za rješavanje.

Prvenstvo opisa općeg rješenja (onog što danas nazivamo formulom za rješenje kvadratne jednačbe) pripada istom autoru koji prvi puta razmatra jednačbe kao takve. Bio je to prvi od velikih matematičara arapskoga doba, Perzijanac **Muhammad ibn Mūsā al-Hvārizmī** (oko 780. – 850.). Djelovao je u Kući mudrosti u Bagdadu, najznačajnijem znanstvenom centru tog doba. Naziva ga se ocem algebre i to ne samo jer prvi razmatra rješavanje jednačbi kao takvih, nego od njega potječe i naziv ove matematičke discipline. Naime, napisao je knjigu *Al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-džabr wa'l-mukābala* (slika 2) iz čijeg je naslova uzeta riječ “al-džabr” i tako je algebra dobila svoje ime. Pritom je al-Hvārizmījev al-džabr jedna od



Slika 2. Stranica iz al-Hvārizmījeve knjige *Al-kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-džabr wa'l-mukābala* (izvor: Wikipedia, slika objavljena kao public domain)

dvije opće tehnike koje koristi za svodenje svih linearnih i kvadratnih jednačbi na jedan od šest tipova.



Slika 3. Stranice iz izdanja al-Hvārizmījeve *Algebre* iz 14. stoljeća u kojima se vidi geometrijska argumentacija postupaka (izvor: Wikipedia, slika objavljena kao public domain)

Naime, budući da i al-Hvārizmī još ne razmatra negativna rješenja ni brojeve, za njega nemaju smisla jednačbe poput $bx + c = 0$ (zbroj dvaju pozitivnih brojeva ne može biti nula). Stoga on razmatra samo jedan tip linearnih jednačbi (mi bismo ga

Kvadrat i 21 je deset korijena.

Prepolovi broj korijena. To je 5.

Pomnoži to sa sobom i umnožak je 25.

Od tog oduzmi 21 koji je dodan kvadratu, ostatak je 4.

Uzmi njegov kvadratni korijen, 2,

i oduzmi ga od pola broja korijena, od 5. Ostaje 3.

To je korijen koji tražiš, čiji kvadrat je 9.

Alternativno, možeš dodati kvadratni korijen polovini broja korijena i zbroj je 7.

To je onda korijen koji tražiš i kvadrat je 49.

$$\begin{aligned} (x^2 + 21 = 10x, ax^2 + c = bx) \\ \left(\frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5\right) \\ \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 5 \cdot 5 = 25\right) \\ \left(D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = 25 - 21 = 4\right) \\ (\sqrt{D} = \sqrt{4} = 2) \\ \left(\frac{b}{2} - \sqrt{D} = 5 - 2 = 3\right) \\ (x = 3) \\ \left(\frac{b}{2} + \sqrt{D} = 5 + 2 = 7\right) \\ (x = 7) \end{aligned}$$

dan danas zapisali kao $bx = c$ gdje je $b, c > 0$) i pet tipova kvadratnih jednadžbi (koje bismo danas pisali kao $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$ i $ax^2 = bx + c$ gdje je $a, b, c > 0$). Za svaki od tih tipova detaljno opisuje opći postupak rješavanja, a opravdava ga geometrijski (slika 3). Da bi proizvoljno zadanu kvadratnu ili linearnu jednadžbu sveo na jedan od svojih šest tipova, al-Hvārizmī koristi operacije al-džabr (nadopunjavanje, tj. prebacivanje oduzetih članova na drugu stranu jednadžbe) i al-mukabala (grupiranje članova s istom potencijom). Treba napomenuti da al-Hvārizmī još nema nikakvu simboliku, ali nepoznanicu (naš x) u tekstu standardno naziva korijenom (ili brojem dirhama), a njezin kvadrat (naš x^2) jednostavno kvadratom. Vjerojatno najpoznatiji primjer al-Hvārizmījeva zadatka s rješenjem je prikazan u gornjem okviru (u zagradama u desnom stupcu navodimo suvremeni simbolički zapis).

Al-Hvārizmī završava ovaj zadatak napomenom:

Kad naiđeš na zadatak koji vodi na ovaj slučaj, pokušaj ga riješiti zbrajanjem, a ako to ne uspije, uspijet će s oduzimanjem. U ovom slučaju funkcionira i zbrajanje i oduzimanje, za razliku od ostala tri slučaja u kojima se treba prepoloviti broj korijena. Znaj i da u zadatku koji vodi na ovaj slučaj pomnožiš pola broja korijena sa sobom. Ako je umnožak manji od broja dirhama pribrojenih kvadratu, slučaj je nemoguć. Ako je pak jednak broju dirhama, onda je korijen jednak polovici broja korijena.

Vidimo da su kod al-Hvārizmīja zadatci s jednadžbama postali primjeri općeg postupka, koji danas zapisujemo formulom, a samo ga nedostatak simbolike i nepoznavanje negativnih brojeva priječi da postupak opiše kao jedinstven. Također, za svaki od slučajeva on postupak argumentira geometrijski (u osnovi geometrijskim svodenjem na potpun kvadrat, tj. ekvivalentno modernom izvodu formule), dakle dokazuje točnost svog postupka. Gornji je pak zadatak posebno poznat jer je ujedno prvi primjer kvadratne jednadžbe s dva različita rješenja u povijesti. U Europi će rješenje kvadratne jednadžbe postati poznato tek od 12. st. nadalje, no zato će Europljani biti prvi koji će naći opća rješenja jednadžbi 3. i 4. stupnja [4]. O tome više u sljedećem broju.

LITERATURA

- 1/ The Mathematical Tourist – A Piece of the Berlin Papyrus, <https://thematheoreticaltourist.wordpress.com/2014/05/24/a-piece-of-the-berlin-papyrus/>
- 2/ MacTutor History of Mathematics Archives – An Overview of Babylonian Mathematics, http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_mathematics.html
- 3/ A. E. Berriman (1956.): The Babylonian Quadratic Equation, *The Mathematical Gazette*, 40, 185–192.
- 4/ MacTutor History of Mathematics Archives – Quadratic, Cubic and Quartic Equations, http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html