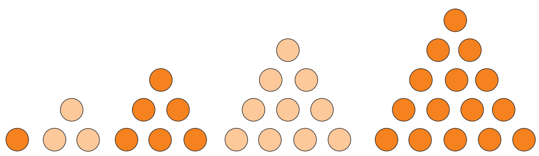
Figurativni brojevi

***Branimir Dakić**, Zagreb*

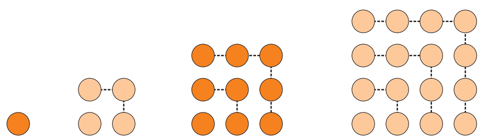
Geometrijsko predočavanje prirodnih brojeva točkicama ili kvadratićima omogućuje zorno izvođenje raznih algebarskih svojstava i relacija. Takvi su postupci razvijeni još u Staroj Grčkoj, a osobito su ih njegovali Pitagorejci. Jednom točkicom (ili kvadratićem) prikazan je broj 1, a slaganjem točkica (kvadratića) u određene oblike dobivaju se ostali prirodni brojevi. Posebnim pak rasporedom i slaganjem točkica oblikuju se tzv. **figurativni brojevi**.

Trokutasti brojevi



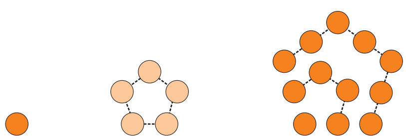
1 3 6 10 15

Kvadratni brojevi



1 4 9 16

Peterokutni brojevi



1 5 12

Ovakvi nizovi mogu se analogno nastavljati. Već sa samih sličica jasno je na koji se način iz nekog broja u pojedinom nizu konstruira broj koji mu neposredno slijedi.

Lako ćemo primijetiti da je $n-$ ti po redu trokutasti broj jednak zbroju

$$T_3(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Tako niz trokutastih brojeva glasi: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...

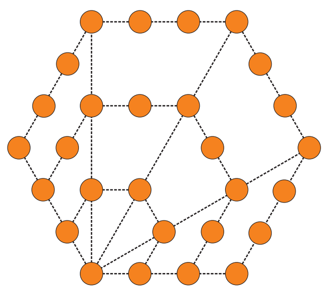
Uočavamo i kako je $n-$ ti po redu kvadratni broj jednak

$$T_4(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Možemo isto tako zaključiti da je

$$\begin{aligned} T_5(n) &= 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) \\ &= 3T_3(n) - 2n = \frac{1}{2} \cdot n(3n-1). \end{aligned}$$

Nastavljajući dalje, mogli bismo odrediti i $n-$ ti šesterokutni broj koji možemo predočiti sljedećom sličicom.



Povučemo li dijagonale iz jednog vrha šesterokuta, podijelit ćemo šesterokut na četiri trokuta. Zbog toga $T_6(n)$ možemo odrediti kao zbroj četiriju trokutastih brojeva umanjen za broj točkica na dijagonalama, jer njih smo prebrajali dvaput:

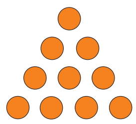
$$T_6(n) = 4T_3(n) - 3n = n(2n-1).$$

No ipak, matematičarima su osobito zanimljivi trokutasti brojevi i njima su se mnogi i nekada i danas često bavili. Prisjetimo se, to su brojevi oblika

$$T_3(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ti su brojevi osobito bili predmetom zanimanja *Pitagorejaca*. Četvrti po redu trokutasti broj, broj 10, bio je jedan od njihovih mističnih simbola. Nad njim su se molili i zaklinjali izgovarajući riječi:

Blagoslovi nas, o božanski broju, koji si stvorio i bogove i ljude. O sveti, sveti Tetraktise! U tebi je vrelo i u tebi su korijeni prirode koja vječno cvate.



Trokutasti brojevi ispunjavaju sljedeće rekurzivne jednakosti:

$$3T_3(n) + T_3(n-1) = T_3(2n),$$

$$3T_3(n) + T_3(n+1) = T_3(2n+1),$$

$$T_3(n) + T_3(n-1) = n^2,$$

$$2T_3(n) + 1 = T_3(n-1) + T_3(n+1).$$

Također vrijede i sljedeća zanimljiva svojstva.

Zbroj svakih dvaju uzastopnih trokutastih brojeva je kvadratni broj, jer je $T_3(n) + T_3(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}(n-1)n = n^2$. Ima i drugih zanimljivih veza između trokutastih i kvadratnih brojeva:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} T_3(k) = n^2.$$

$$T_3(n)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left(n(n+1)\right)^2.$$

Brojevi 1, 36, 1225, 41616, 1413721, ... istovremeno su i trokutasti i kvadratni.

Svaki drugi trokutasti broj je šesterokutan, odnosno, vrijedi jednakost $T_6(n) = T_3(2n-1)$.

Veza trokutastih i peterokutnih brojeva dana je jednakošću

$$T_5(n) = \frac{1}{3} T_3(3n-1).$$

Svaki je paran savršen broj [1] trokutast $T_3(p)$ pri čemu je p prost, a svaki neparan $(P > 6)$ je oblika

$$P = 1 + 9T_3(n) = T_3(3n+1),$$

gdje je $T_3(n)$ trokutast broj s $n = 8k + 2$.

Moglo bi se nastaviti s ovom pričom. No skratimo je, a ako je sami želite dopuniti, krenite primjerice na `http://mathworld.wolfram.com/TriangularNumber.html`.

A na našoj *Duplerici* ilustrirani su izvodi nekih algebarskih jednakosti primjenom mnogokutnih brojeva.

[1] *Savršen (perfektan) broj* je prirodni broj koji je jednak zbroju svojih djelitelja manjih od samog broja. Primjerice, 6 je savršen broj, jer je $6 = 1 + 2 + 3$. Savršeni su brojevi još 28, 496,...