

Linearna funkcija i linearnost

Sanja Rukavina, Rijeka

Prvo izdanje knjige **Handbook of Linear Algebra**, opsežnog priručnika sa 77 poglavlja u čijem su pisanju sudjelovali mnogobrojni matematičari današnjice, obuhvativši znanja iz područja linearne algebre i njezinih primjena, objavljeno je 2007. godine. Pedeseto poglavlje u toj knjizi nosi naziv **Linearno programiranje**, a njegov je autor Leonid N. Vaserstein s Penn State sveučilišta. Na samom početku poglavlja autor definira osnovne pojmove kao što su optimalno rješenje, linearna forma, afina funkcija, linearni program i sl. Pritom o pojmu *linearna funkcija* navodi sljedeće:

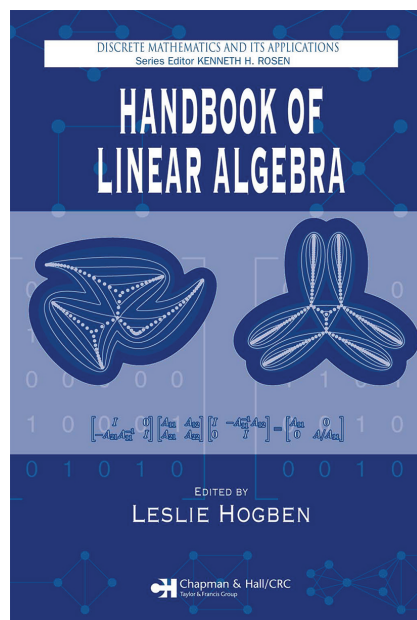
Pojam linearna funkcija, koji ovdje nećemo koristiti, znači linearna forma u nekim priručnicima, a afina funkcija u drugima.

Ova se rečenica često citira kada se želi objasniti terminološka nedorečenost i nejasnoće do kojih je dovela dvojaka uporaba pojma linearna funkcija. Svjesni ovog problema, mnogi matematičari, poput Vasersteina, izbjegavaju koristiti pojam linearna funkcija i koriste jednu od dvije navedene inačice: **linearna forma** ili **afina funkcija**.

Općenito gledajući, **linearna forma** je linearna funkcija definirana iz nekog vektorskog prostora u pripadno polje skalara. Pri tome "linearna funkcija" označava činjenicu da se radi o funkciji koja ima svojstvo linearnosti, odnosno funkciji f za koju vrijedi

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

pri čemu su x i y vektori, a α i β skalari.



Primjer linearne forme s kojim se najčešće srećemo u školskoj matematici jest onaj u kojem se promatraju realne funkcije realne varijable. Promotrimo taj primjer malo detaljnije.

Primjer

Polje realnih brojeva može se promatrati kao vektorski prostor nad samim sobom kao poljem. Prema tome je svaka realna funkcija oblika

$$g(x) = kx$$

linearna forma na skupu realnih brojeva s obzirom da za sve realne brojeve α , β , x i y vrijedi

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &= k(\alpha x + \beta y) = \alpha kx + \beta ky \\ &= \alpha g(x) + \beta g(y). \end{aligned}$$

S druge strane, funkcija oblika $f(x) = kx + l$ nije linearna forma kada je $l \neq 0$ jer takva funkcija ne posjeduje svojstvo linearnosti. Naime,

$$f(\alpha x + \beta y) = k(\alpha x + \beta y) + l$$

i

$$\begin{aligned}\alpha f(x) + \beta f(y) &= \alpha(kx + l) + \beta(ky + l) \\ &= k(\alpha x + \beta y) + l(\alpha + \beta),\end{aligned}$$

odnosno

$$f(\alpha x + \beta y) \neq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Kažemo još da je realna funkcija realne varijable zadana sa $f(x) = ax$, pri čemu su a i x realni brojevi, linearni operator na skupu realnih brojeva.

Afina funkcija na skupu realnih brojeva je funkcija oblika

$$f(x) = ax + b.$$

Njezin naziv povezan je s pojmom afinog prostora, u što ovdje nećemo ulaziti. Recimo samo da se svaki vektorski prostor, pa tako i skup realnih brojeva, može interpretirati kao afini prostor nad samim sobom. Kao što smo već vidjeli, afina funkcija općenito nema svojstvo linearnosti. Ona je linearna jedino u slučaju kada je $b = 0$.

Znajući što je svojstvo linearnosti funkcije i kako se definira afina funkcija, očekivali bismo da se ovi pojmovi koriste na ispravan i jednoznačan način. No, to nije tako niti u nastavi matematike. Nije sasvim jasno je li do toga došlo zbog činjenice da se obje funkcije grafički prikazuju pravcem (kod linearne funkcije to je pravac koji sadrži ishodište koordinatnog sustava) ili zbog pojma linearna jednadžba, koji podrazumijeva jednadžbu oblika $ax + b = 0$, ali sve češće se linearnom funkcijom naziva svaka afina funkcija, a ne samo ona koja posjeduje svojstvo linearnosti. Pri tome neki autori upozoravaju na moguću nesporazum (vidi, npr., Županović, Šorić, 2016.), dok mnogi to ne čine. Iz spomenutog Vasersteinova komentara možemo zaključiti da Hrvatska nije jedina država u kojoj se matematičari suočavaju s ovim problemom.

Možemo se zapitati – je li uvijek bilo tako? Provirimo li u starije udžbenike, uočit ćemo da se u 7.

razredu osnovne škole (vidi, npr., Pauše, 1993.) i 1. razredu srednje škole (vidi, npr., Gelineo, Kurepa, 2000.) uvode i pojam afine funkcije

$$f(x) = ax + b$$

i pojam linearne funkcije

$$f(x) = ax.$$

To je, naravno, bilo u skladu s važećim nastavnim planom i programom. Naime, u dokumentu Okvirni nastavni programi općeobrazovnih predmeta u srednjim školama iz 1997. godine nalazimo graf linearne i afine funkcije u svim programima koji u 1. razredu srednje škole imaju barem 3 sata matematike tjedno, dok se u programima s manje sati navodi samo graf linearne funkcije. Vjerojatno se očekivalo da će u tim programima, zbog malog broja sati, biti obrađen samo slučaj kada je $b = 0$.

U Nastavnom planu i programu za osnovnu školu iz 1999. godine i Nastavnom planu i programu za osnovnu školu iz 2006. godine ne spominje se pojam afine funkcije, dok se pojam linearne funkcije uvodi u 7. razredu. Pri tome se nigdje ne navodi eksplicitno da se pod time podrazumijeva da treba uvesti afinu funkciju $f(x) = ax + b$, a ne samo njezin posebni slučaj kada je $b = 0$, odnosno kad ta funkcija ima svojstvo linearnosti. No, kako se graf linearne funkcije povezuje s eksplicitnim oblikom jednadžbe pravca i zbog činjenice da se pod obrazovnim postignućima navodi kako će se određivati nul-točke zadane linearne funkcije, možemo zaključiti da se očekuje kako će se pod pojmom linearne funkcije uvesti afina funkcija $f(x) = ax + b$. Naime, svaka realna funkcija realne varijable koja ima svojstvo linearnosti ima nul-točku $x = 0$. Posljedično, u udžbenicima iz matematike za osnovnu školu više ne nalazimo pojam afina funkcija, već se funkcija oblika $f(x) = ax + b$ naziva linearnom funkcijom iako ona općenito ne posjeduje svojstvo linearnosti. Analiza koju je T. Peteani u okviru svog diplomskog rada provela na udžbenicima odobrenim za uporabu u školskoj godini 2014./2015. pokazala je da se niti u udžbenicima za srednju školu više ne spominje afina funkcija.

Prema aktualnom *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* u osnovnoj školi ne spominje se niti pojam afine funkcije niti pojam linearne funkcije (osim što se kao prošireni sadržaj u 7. razredu navodi: Povezivanje linearne ovisnosti i linearne funkcije). U prvom razredu gimnazije uvodi se pojam linearne funkcije, dok se pojam afine funkcije ne spominje. Iz primjera danog u Kurikulumu vidljivo je da se pod linearnom funkcijom podrazumijeva svaka funkcija oblika $f(x) = ax + b$.

Bez obzira koji termin u nastavi koriste za funkciju zadanu formulom $f(x) = ax + b$, izuzetno je bitno da učitelji i nastavnici znaju što je afina funkcija, a što svojstvo linearosti funkcije, te da budu svjesni da linearnost kao svojstvo funkcije često nije ono temeljem čega se funkcija naziva linearnom. Poznavanje navedenih pojmova važan je dio njihove matematičke kompetencije. Naime, uz poznavanje matematičkih sadržaja, bitno je i poznavanje terminoloških nedorečenosti i nejasnoća vezanih uz pojedine pojmove kako bi se u nastavi izbjeglo pretjerano pojednostavljivanje koje može dovesti do metodičkih, ali i matematičkih, pogrešaka pri poučavanju matematike.

LITERATURA

- 1/ M. Gelineo, S. Kurepa (2000.): *Matematika 1, udžbenik izbirka zadataka s rješenjima za prvi razred prirodoslovno-matematičke gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb.
- 2/ *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, NN7/2019, https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html, pristupljeno 29. prosinca 2019.
- 3/ <https://www.ncvvo.hr/nastavni-planovi-i-programi-za-gimnazije-i-strukovne-skole/>, pristupljeno 29. prosinca 2019.
- 4/ *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, Prosvjetni vjesnik, Posebno izdanje (broj 2), lipanj 1999.
- 5/ *Nastavni plan i program za osnovnu školu*, MZOŠ, 2006., <https://www.azoo.hr/images/AZ00/Ravnatelj/RM/Nastavni-plan-i-program-za-osnovnu-skolu--MZOŠ-2006-.pdf>, pristupljeno 29. prosinca 2019.
- 6/ *Okvirni nastavni programi općeobrazovnih predmeta u srednjim školama*, Glasnik Ministarstva prosvjete i športa Republike Hrvatske, posebno izdanje, broj 11, Zagreb, lipanj 1997.
- 7/ Ž. Pauše (1993.): *Matematika za sedmi razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb.
- 8/ T. Peteani (2016.): *Afina i linearna funkcija u nastavi matematike*, Diplomski rad, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci.
- 9/ M. Polonijo i ostali: *Euklidski prostori*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eukl/literatura/EP.pdf>, pristupljeno 29. prosinca 2019.
- 10/ L. N. Vaserstein (2007.): *Linear Programming u Handbook of Linear Algebra* (ed. L. Hogben), Chapman & Hall/CRC.
- 11/ V. Županović, K. Šorić (2016.): *Primijenjena matematika podržana računalom (Priručnik za nastavnike)*, Slavonski Brod.

Kako zapisati broj 2020 na 28 različitih načina

$$\begin{aligned}
 1^2 + 5^2 + 25^2 + 37^2 &= 2020 \\
 1^2 + 7^2 + 11^2 + 43^2 &= 2020 \\
 1^2 + 7^2 + 17^2 + 41^2 &= 2020 \\
 1^2 + 11^2 + 23^2 + 37^2 &= 2020 \\
 1^2 + 13^2 + 25^2 + 35^2 &= 2020 \\
 1^2 + 17^2 + 19^2 + 37^2 &= 2020 \\
 2^2 + 4^2 + 8^2 + 44^2 &= 2020 \\
 2^2 + 4^2 + 20^2 + 40^2 &= 2020 \\
 2^2 + 12^2 + 24^2 + 36^2 &= 2020 \\
 3^2 + 21^2 + 27^2 + 29^2 &= 2020
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3^2 + 7^2 + 21^2 + 39^2 &= 2020 \\
 3^2 + 9^2 + 29^2 + 33^2 &= 2020 \\
 4^2 + 8^2 + 28^2 + 34^2 &= 2020 \\
 4^2 + 14^2 + 28^2 + 32^2 &= 2020 \\
 5^2 + 23^2 + 25^2 + 29^2 &= 2020 \\
 7^2 + 11^2 + 13^2 + 41^2 &= 2020 \\
 7^2 + 11^2 + 25^2 + 35^2 &= 2020 \\
 7^2 + 13^2 + 29^2 + 31^2 &= 2020 \\
 8^2 + 10^2 + 16^2 + 40^2 &= 2020
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8^2 + 16^2 + 26^2 + 32^2 &= 2020 \\
 9^2 + 11^2 + 27^2 + 33^2 &= 2020 \\
 9^2 + 15^2 + 25^2 + 33^2 &= 2020 \\
 11^2 + 13^2 + 19^2 + 37^2 &= 2020 \\
 12^2 + 16^2 + 18^2 + 36^2 &= 2020 \\
 12^2 + 20^2 + 24^2 + 30^2 &= 2020 \\
 13^2 + 19^2 + 23^2 + 31^2 &= 2020 \\
 15^2 + 21^2 + 25^2 + 27^2 &= 2020 \\
 17^2 + 19^2 + 23^2 + 29^2 &= 2020
 \end{aligned}$$