

Postoji li savršeni partner?

(Možda samo u teoriji grafova...)



Sanja Sruk, Zagreb

Teorija grafova je područje matematike koje nalazi široku primjenu u različitim područjima jer se mnoge pojave mogu modelirati grafovima, tj. točkama (vrhovima, čvorovima) i njihovim spojnica (bridovima, granama). Npr. cestovna povezanost u nekom gradu ili između gradova, tijek računalnog programa, socijalni odnosi u nekoj sredini, optimizacija nekog procesa, raspored poslova u poduzeću itd.

Malo povijesti

Povijest teorije grafova seže u davnu 1736. godinu kada je Leonhard Euler objavio rad u kojem rješava poznati problem *sedam mostova Königsberga*, čime je utro put razvoju ne samo teorije grafova, nego i topologije. 1852. godine Francis Guthrie postavio je pitanje je li točno da se svaka politička karta može obojiti sa samo četiri boje tako da nikoja dva susjedna područja nisu obojena istom bojom. Metodu rješavanja tog *problema četiri boje* dao je nakon više od stoljeća Heinrich Heesch (1969.), a potpuni dokaz Kenneth Appel i Wolfgang Haken 1976.

Mnogobrojni problemi zanimljivih imena rješavaju se s pomoću teorije grafova. Jedan od njih je *problem tri kolibe* (engl. *three cottages problem* ili *three utilities problem*) u kojem se postavlja pitanje je li moguće u tri kolibe uvesti vodu, struju i plin tako da svih devet veza leži u istoj ravnini i nikoje dvije se ne sijeku. Zatim imamo *problem kineskog poštara*

koji mora pronaći optimalni put, tj. uz što manje hodanja razdijeliti poštu po cijelom gradu i vratiti se na mjesto s kojeg je krenuo. Tu je i *problem trgovačkog putnika* koji želi u što kraćem vremenu obići neke gradove i vratiti se kući. Izdvojit ćemo i *problem rangiranja igrača* gdje na nekom turniru, na kojem je svaki igrač odigrao po jedan meč sa svakim od ostalih igrača, na osnovi postignutih rezultata treba napraviti konačni poredak igrača. No, vratimo se temi i pronađimo matematički odgovor na pitanje postoji li savršeni bračni partner.

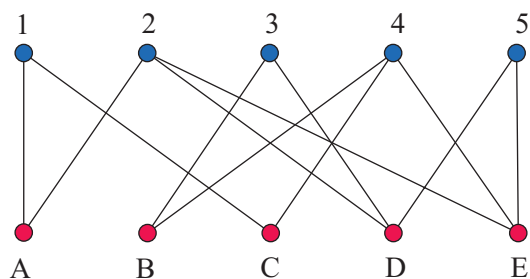
Problem savršenog braka

Ovaj problem poznat je i kao *problem savršene ženidbe*, a u stranoj literaturi *stable marriage problem*.

Primjer: U nekom gradu postoji jednak broj slobodnih mladića i djevojaka i neki od njih se međusobno poznaju (na skici su prikazana poz-

Sanja Sruk, prof. mentor, 1. gimnazija, Zagreb, sanja.sruk1@gmail.com

nanstva mladića 1-5 i djevojaka A-E). Mogu li se oni međusobno poženiti i poudavati tako da svaki mladić dobije neku od djevojaka koje poznaje i obratno?



Jedna od mogućnosti je 1-A, 2-D, 3-B, 4-C i 5-E. Međutim, za dobar brak nije dovoljno samo poznanstvo. Možda se mladiću 1 više sviđa djevojka C nego A. Zato je potrebno da i mladići i djevojke naprave svoju listu prioriteta, tj. rangiraju potencijalne bračne partnere tako da osobu koja im se najviše sviđa stave na prvo mjesto, sljedeću na drugo itd. Tako bridovi grafa dobivaju svoju težinu i cilj je pronaći parove tako da zbroj težina na grafu bude minimalan (ili maksimalan, ovisno o tome kako postavimo ovaj ili neki drugi problem koji se rješava na sličan način) te da se ne dogodi situacija da dvije osobe nisu spojene, a međusobno su si na listi prioriteta na višem mjestu od osoba s kojima su spojene.

Zamislamo da imamo četiri osobe, dva mladića i dvije djevojke, recimo da se zovu Marko i Darko, te Tina i Nina, te da njihove rang-liste izgledaju ovako:

Marko: 1. Nina, 2. Tina
 Darko: 1. Nina, 2. Tina
 Tina: 1. Marko, 2. Darko
 Nina: 1. Marko, 2. Darko.



Spojimo li Marka i Tinu te Darka i Ninu, to baš i nije dobro, jer Marko preferira Ninu, kao i ona njega. Ako spojimo Marka i Ninu, te Darka i Tinu, to je, u smislu rješavanja ovog problema, savršeno spajanje jer nema parova koji se međusobno preferiraju, a nisu spojeni. Doduše, Darko i Tina vjerojatno nisu najsretniji tim rješenjem, ali u ovoj specifičnoj situaciji (na nekom pustom otoku gdje je samo njih četvero) ono je optimalno.

Općenito, uzmimo da imamo n mladića i n djevojaka. Svaki mladić i svaka djevojka imaju svoju rang-listu osoba suprotnog spola koje ih privlače. Je li moguće uvijek napraviti savršeno spajanje, tj. je li moguće postići ranije opisani cilj?

Hoćeš li se udati za mene?

Primjer: Imamo 5 mladića i 5 djevojaka i svaki je napravio svoju rang-listu.

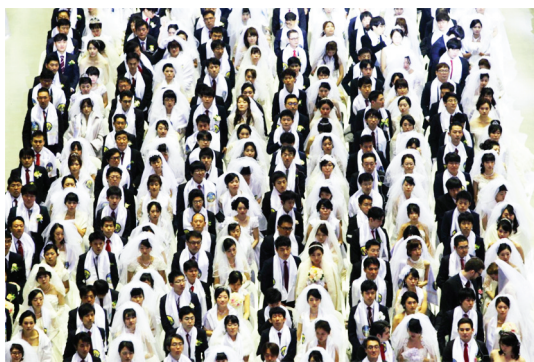
mladići:	djevojke:
1: C	A: 3
B	5
E	2
A	1
D	4
2: A	B: 5
B	2
E	1
C	4
D	3
3: D	C: 4
C	3
B	5
A	1
E	2
4: A	D: 1
C	2
D	3
B	4
E	5
5: A	E: 2
B	3
D	4
E	1
C	5

Postupak koji nam govori kako u najviše n^2 koraka možemo napraviti savršeno sparivanje zove

se *Gale-Shapleyev algoritam*. Iterativan je i izgleda ovako:

U prvom koraku mladići odlaze djevojci koja im se najviše sviđa (dakle, prvoj na rang-listi) i pitaju ju: "Hoćeš li se udati za mene?", a ona odgovara "možda" onom prosцу koji je na njenoj listi najviše rangiran (ne nužno prvi na listi, ali prvi od onih koji ju prose), a ostalima "ne". Mladići brišu s liste djevojke koje su ih odbile, a djevojke su privremeno zaručene za mladića kojemu su rekly "možda".

U sljedećem koraku svaki mladić koji nije zaručen prosi najviše rangiranu djevojku bez obzira na to je li ta djevojka zaručena ili nije. U slučaju da djevojka nije zaručena, ona postupa kao u prvom koraku, a ako je zaručena, ali joj se novi prosac sviđa više od privremenog zaručnika, odgovara mu "možda", čime on postaje njen novi zaručnik, a bivši zaručnik je ponovo slobodan i u sljedećoj iteraciji prosi neku drugu djevojku. Postupak se ponavlja dok svi nisu zaručeni¹.



Kako bi to izgledalo u našem primjeru? Djevojku C prosi samo mladić 1 i ona mu odgovara "možda" te su oni privremeno zaručeni. Djevojku A prose mladići 2, 4 i 5, a budući da se njoj najviše sviđa 5 ona njemu kaže "možda", a mladićima 2 i 4 "ne" te ju oni brišu sa svoje liste. Mladić 3 prosi djevojku D i ona kaže "možda". Sada su mladići 1, 3 i 5 zaručeni i u idućem koraku ne prose niti jednu djevojku. Mladić 2 prosi B i dobiva odgovor "možda", a 4 prosi C i ona mu kaže "možda" čime raskida

zaruke s 1, te je on ponovo slobodan, a 4 i C su zaručeni. Sada 1 prosi B, no ona preferira svog zaručnika 2 pa mu kaže "ne". Postupak završava u sljedećem koraku kad 1, koji je jedini bez zaručnice prosi E. Savršeni parovi su 1-E, 2-B, 3-D, 4-C i 5-A.

Iako algoritam izgleda zgodno, ali potpuno neprijemljivo u svakodnevnom životu, ipak ga (uz pomoć računala) koriste agencije koje samcima traže partnere, a u malo modificiranom obliku koristi se za rješavanje sličnih problema.



Problem cimera – razlika je u tome što se parovi biraju unutar jednog skupa, a ne dva disjunktna skupa.

Problem fakulteta i studenata (engl. *college admissions problem*) – razlika je što fakultet prima više od jednog studenta.

Problem zapošljavanja – kako rasporediti poslove među radnicima ako svaki radnik zna obavljati neke od poslova, ali ne jednako dobro (ili ne po istoj cijeni).

A vi? Nadam se da ste i bez ovog algoritma pronašli svog savršenog partnera, jer u ljubavi je ipak važnija kemija nego matematika.

LITERATURA

- 1/ D. Veljan (1989.): *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb.
- 2/ https://en.wikipedia.org/wiki/Stable_marriage_problem
- 3/ <https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall106/.../graph2.pdf>

¹ Više detalja o Gale-Shapleyevom algoritmu možete pronaći na internetskoj adresi <https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A3494/datastream/PDF/view>.