

Tko je prvi... znao riješiti kubnu jednadžbu?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Dok smo se u prošla dva broja pozabavili pitanjem prvih rješenja jednadžbi koje se u punoj općenitosti uče rješavati tijekom obveznog školovanja, tj. linearnih i kvadratnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, u ovom ćemo broju saznati kako su prvi puta riješene jednadžbe koje ne samo da se ne rješavaju u školi (do na neke posebne slučajeve), nego ih i mnogi matematičar ne zna riješiti, a da ne pogleda u literaturu – to su jednadžbe 3. stupnja.

Kao što smo vidjeli, do arapskog doba, odnosno visokog srednjeg vijeka postalo je poznato kako riješiti bilo koju linearnu ili kvadratnu jednadžbu. Jedini hendikep, uz nedostatak formula, u odnosu na suvremeni pristup bio je taj što, iako su negativni brojevi već bili poznati, nisu bili smatrani mogućim rješenjima jednadžbi. Budući da je od al-Hvārizmīja bilo poznato da se svaka linearna ili kvadratna jednadžba može srediti na oblik sa samo pozitivnim koeficijentima, došlo je do razlikovanja tipova jednadžbi koje imaju smisla (koje mogu imati pozitivna rješenja). Dok je al-Hvārizmī stoga imao samo jedan tip linearnih i pet tipova kvadratnih jednadžbi, njegovu je klasifikaciju na kubne jednadžbe proširio perzijski matematičar i pjesnik **Omar Hajjām** (1048. – 1131.) i dobio 19 tipova kubnih jednadžbi, no znao ih je (do na neke posebno jednostavne slučajeve) rješavati samo koristeći presjeke konika. Od tih 19 tipova, njih 5 imaju slobodne članove jednake 0 pa se svode na kvadratne jednadžbe, a jedna je čista kubna jednadžba oblika "kub nepoznanice jednak je zadanom broju" koja se rješava direktno računanjem trećeg korijena. Preostalo je dakle naći rješenje za ostalih 13 tipova kubnih jednadžbi.

Početkom renesanse, kad su rezultati arapskih matematičara već bili dobro poznati među europskim



Slika 1. Omar Hajjām (1048. – 1131.)

(izvor: Wikipedia, slika objavljena kao public domain)

matematičarima, talijanski matematičari počeli su se baviti traženjem rješenja kubnih jednadžbi "u radikalima". Dakle, tražili su pravila za računanje rješenja direktno iz koeficijenata jednadžbe koristeći samo osnovne četiri računske operacije i ko-

rjenovanja (do uključivo korijena koji odgovaraju stupnju jednadžbe). Uočimo da je standardna formula za rješenja kvadratne jednadžbe upravo njezino rješenje u radikalima.

Nije poznato tko je tijekom 15. stoljeća uočio da se onih 13 preostalih tipova kubnih jednadžbi iz Ĥajjāmove klasifikacije mogu svesti na samo 3 tipa u kojima nema kvadratnog člana, koristeći jednostavnu supstituciju izvorne nepoznanice s novom nepoznanicom. Naime, ako je zadana bilo kakva normirana kubna jednadžba (tj. ako vodeći koeficijent nije 1, prvo ju podijelimo s njime), onda supstitucija u kojoj uvodimo novu nepoznanicu jednaku staroj uvećanoj za trećinu koeficijenta uz kvadratni član rezultira novom kubnom jednadžbom u kojoj nema kvadratnog člana (koeficijent je jednak 0). Možemo reći da su talijanski matematičari oko 1500. godine znali da je dovoljno naći rješenje u radikalima za sljedeća tri tipa tzv. reduciranih kubnih jednadžbi zapisanih u modernoj notaciji:

$$x^3 = px + q$$

$$x^3 + px = q$$

$$x^3 + q = px$$

s pozitivnim koeficijentima p i q .

Bolonjski profesor matematike **Scipione del Ferro** (oko 1463. – 1526.) uspio je oko 1515. godine naći postupak za rješavanje jednog od tih tipova, no postupak je zadržao u tajnosti jer je u to doba u Italiji bilo moguće dobro zaraditi i naći bogate “sponzore” na međusobnim natjecanjima matematičara. Na smrti je postupak otkrio svom studentu, **Antoniu Fioru**, koji nije bio tako vrstan matematičar te se po del Ferrovoj smrti počeo hvaliti svojim znanjem i 1535. godine izazvao samoukog, ali iznimno talentiranog matematičara poznatog pod nadimkom **Tartaglia**, pravim imenom **Niccolò Fontana** (1499./1500. – 1557.), na matematički dvoboj. Tartaglia je znao rješavati drukčije kubne jednadžbe, a brzo je razvio metodu za rješavanje jednažbi koje je



Slika 2. Niccolò Fontana Tartaglia (1499./1500. – 1557.)
(izvor: Wikipedia, slika objavljena kao public domain)

očekivao temeljem Fiorove samohvale te je riješio sve Fiorove zadatke, dok Fior nije znao riješiti Tartagline. Tartaglia je stekao slavu, a Fior “nestaje iz priče”.

Tartaglia je u osnovi otkrio istu metodu kao i del Ferro. Iz današnje perspektive, kad pozitivne i negativne koeficijente smatramo ravnopravnim, to je ujedno i jedina potrebna metoda. No, u Tartagliino doba bilo je potrebno smisliti metodu i za ostala dva gore navedena tipa reduciranih kubnih jednažbi. Tartaglinu (točnije, del Ferro–Tartaglinu) metodu je za ostala dva slučaja doradio¹ milanski liječnik, matematičar i kockar **Girolamo Cardano** (1501. – 1576.) te je postupke objavio u svom najvažnijem djelu *Ars magna* (1545.).

Budući da u današnje vrijeme razumijemo značenje i primjenu negativnih brojeva, opisat ćemo sva tri postupka odjednom, dozvoljavajući da u reduciranoj kubnoj jednadžbi $x^3 = px + q$ koeficijenti p i q budu bilo pozitivni bilo negativni. Prvi korak je uvođenje supstitucije $x = u + v$. Kad to uvrstimo

¹ Iznimno je zabavna i zanimljiva priča o tome kako je Cardano uvjerio Tartagliu da mu oda svoj postupak, no ta je priča izvan opsega ove rubrike. Sve zainteresirane upućujemo na literaturu, npr. [2].



Slika 3. Girolamo Cardano (1501. – 1576.)
(izvor: Wikipedia, slika objavljena
kao *public domain*)

u našu jednadžbu i sredimo, svest ćemo je na oblik $u^3 + v^3 + (u + v)(3uv - p) = q$. Postavimo dodatni uvjet da bude

$$3uv = p$$

i preostaje

$$u^3 + v^3 = q.$$

Ako kubiramo dodatni uvjet, vidimo da smo dobili sustav za u^3 i v^3 koji je oblika

$$u^3 v^3 = \frac{p^3}{27}, \quad u^3 + v^3 = q.$$

Sustav riješimo supstitucijom i svođenjem na kvadratnu jednadžbu. Naravno da se taj postupak može provesti u punoj općenitosti te se tako dobiju tzv. Tartaglia–Cardanove formule za rješenje kubne jednadžbe u radikalima.

Kad je Cardano do kraja opisao metode rješavanja kubnih jednadžbi, a prije objavljivanja *Ars magne*, njegov student **Lodovico Ferrari** (1522. – 1565.) iskoristio ih je da dobije i opće rješenje jednadžbi četvrtog stupnja. Njegovo se rješenje svodi

na redukciju (eliminaciju kubnog člana), svođenje članova stupnja 4 i 2 na potpun kvadrat na lijevoj strani jednadžbe, prebacivanje ostalih članova na desnu stranu, uvođenje nove nepoznanice i postizanje (rješavanjem kubne jednadžbe) da i desna strana bude potpun kvadrat, nakon čega riješimo jednadžbu do kraja.

Za kraj smo izdvojili dvije zanimljivosti. Prvo, Cardano je svoje metode opisao na konkretnim kubnim jednadžbama i pri rješavanju jedne kao međukorak u računu dobio je drugi korijen negativnog broja. Znajući da njegova polazna jednadžba ima (pozitivno, realno) rješenje, nije to odbacio kao besmisleno, nego prihvatio kao međukorak u računu. Tako se može reći da su kompleksni brojevi stvarno uvedeni radi rješavanja jednadžbi, no ne zato da bismo našli nerealna rješenja kvadratnih jednadžbi, nego da bismo našli realna rješenja kubnih jednadžbi. O tome smo već pisali u broju 96.

Drugo, nakon što su tako u prvim desetljećima 16. stoljeća nađena rješenja u radikalima za sve jednadžbe 3. i 4. stupnja, ostalo je otvoreno pitanje: Što je s jednadžbama viših stupnjeva? Dugo se vjerovalo da će i za njih biti nađeni postupci, tj. rješenja u radikalima, no početkom 19. stoljeća norveški matematičar Niels Henrik Abel i francuski matematičar Evariste Galois dokazali su da opće jednadžbe² 5. i viših stupnjeva nemaju rješenja u radikalima.

LITERATURA

- 1/ MacTutor History of Mathematics Archives – Quadratic, Cubic and Quartic Equations, <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Quadratic.etc.equations.html>
- 2/ F. M. Brückler (2011.): *Matematički dvoboji*, Školska knjiga, Zagreb.

² Naravno da za svaki stupanj n postoje jednadžbe stupnja n rješive u radikalima, primjerice $x^n = 1$.