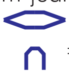
Staroegipatski razlomci, 1. dio

Neven Elezović, Zagreb

Godine 1858. škotski arheolog Henry Rhind je na tržnici u Luxoru kupio smotak pergamenta. Pet godina nakon njegove smrti na dražbi ga je otkupio Britanski muzej u Londonu, gdje se i danas čuva. Riječ je o pergamentu duljine oko 5 m i širine 50 cm, a potječe iz doba oko 1650 g. prije Krista. Rhind je kupio potrgani pergament kojemu je nedostajao srednji dio, a taj je srećom pronađen kasnije i pridružen drugim dvama dijelovima.

Pokazalo se da ovaj smotak (koji danas nazivamo ***Rhindovim papirusom*** ili ***Ahmesovom računicom*** prema imenu njegova autora) sadrži neobičan materijal: to je najstarija poznata zbirka matematičkih zadataka. Na papirusu su napisana (i numerirana) 84 zadatka s postupkom rješavanja. Na temelju toga naučili smo mnogo o načinu računanja starih Egipćana.

U većini zadataka pojavljuju se razlomci i račun s njima. Taj je račun potpuno različit od onog koji mi danas učimo u školama.

Stari su Egipćani razlomke zapisivali na sljedeći način. Znak za razlomak bio je . Broj bi se pisao ispod tog znaka, pa je čitav simbol označavao razlomak s brojnikom jednakim 1. Tako na primjer, vrijedi  $= \frac{1}{3}$,  $= \frac{1}{10}$, jer je  hijeroglif za broj 10.

Dakle, koristili su zapise samo razlomaka koji su recipročna vrijednost prirodnih brojeva, razlomke oblika $\frac{1}{n}$. Ove ćemo razlomke zvati **recipročnim** ili **jediničnim**.

Uz njih, imali su poseban simbol za sljedeća tri razlomka: $\frac{1}{2} =$ , $\frac{2}{3} =$  koji je često korišten, te simbol za $\frac{3}{4} =$ .

Sve ostale razlomke prikazivali su *u obliku sume* jediničnih razlomaka. Na primjer:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

Vrijedi

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4},$$

pa su, kratkoće radi, koristili ove razlomke u prikazima složenijih. Primjerice, na Ahmesovoj računici stoji da je

$$\frac{7}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{30},$$

što je samo skraćeni zapis za

$$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}.$$

prof. dr. sc. Neven Elezović, Zavod za primijenjenu matematiku, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, neven.elezovic@fer.hr

Razmišljajući s povijesnog aspekta, matematika je stoljećima služila kao sredstvo za rješavanje praktičnih problema. To znači da je ovakav način prikazivanja razlomaka, proizašao iz potrebe za rješavanjem praktičnih problema.

Egipat je bio žitnica staroga svijeta.

Primjer 1. *Treba podijeliti 5 vreća žita na 9 radnika. Kako ćemo to učiniti?*

Danas bismo rekli da svaki radnik treba dobiti $\frac{5}{9}$ vreće žita. No, razlomak $\frac{5}{9}$ je samo *informacija o količini*, ali ne i uputa kako diobu treba načiniti. U staroegipatska vremena, napisali bismo (desnu stranu) ove jednakosti

$$\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$$

i postupili na sljedeći način: svaku od 5 vreća podijelili bismo na dva dijela. 9 dobivenih polovica razdijelili bismo radnicima, a posljednju desetu bismo podijelili u 9 hrpica i ponovo podijelili radnicima. Svaki bi radnik prema tome dobio $\frac{1}{2} + \frac{1}{18}$ vreće žita, količinu koja mu pripada.

U ovom je postupku dijeljenja bitno da se iskoristi već načinjena izmjera žita koje je spremljeno u vreće. Vreće su među sobom jednake i količina žita u svakoj od njih je ista. Danas bismo možda žito iz svih vreća isuli na jednu gomilu i potom mjerenjem određivali devetinu te gomile, što je inferioran postupak u odnosu na staroegipatski.

Staroegipatski postupak diobe može se realizirati običnom vagom koja ima dva kraka pri čemu treba na svaki od njih staviti polovinu jedne vreće. Pri tom nam ne treba nikakav dodatni uteg. Ostatak, $\frac{1}{18}$ je hrpa koju je lako odoka ocijeniti i moguća pogreška nije bitna.

Dijelimo li na moderan način, trebamo znati količinu od $\frac{5}{9}$ jedne vreće. Morali bismo onda najprije izmjeriti cijelu vreću za što nam trebaju utezi ili složeniji tip vage, a onda ponovno mjeriti $\frac{5}{9}$ te težine.

Čak i kompliciraniji prikazi još uvijek daju dobar algoritam podjele:

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

Četiri vreće na pet radnika dijelimo tako da svakom radniku damo polovinu vreće. Nakon toga će preostati vreća i pol, pa ćemo svakom dati četvrtinu sadržaja vreće. Od ostatka, koji iznosi četvrtinu jedne vreće, napravit ćemo 5 jednakih hrpa.

U ovom dijelu članka navest ćemo probleme i zadatke koji se mogu uspješno rješavati u osnovnoj školi ili prvom razredu srednje škole.

Primjer 2. *Na proslavi rođendana okupilo se trinaest prijatelja i prijateljica. Za okrijepu su naručili pizze, i to: šest miješanih, četiri s četiri vrste sira i tri pikantne. Dok su čekali pizze, Ivana je morala otići s proslave. Kako će ostatak društva podijeliti te pizze na jednake dijelove i na najjednostavniji način, a da uz to svako proba svaku od naručenih pizza?*

Ovdje se odgovor nameće sam od sebe, a vezan je također uz staroegipatski prikaz razlomka $\frac{13}{12}$:

$$\frac{13}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

Odavde slijedi recept. Svatko treba dobiti polovinu jedne, trećinu druge i četvrtinu treće pice. S obzirom na njihov broj, miješane ćemo podijeliti na dvije polovice, četiri vrste sira na tri dijela, a pikantne na četvrtine.

Jednostavni prikazi

Na jednostavnim primjerima uputit ćemo se u svijet staroegipatske matematike. Vježbat ćemo najprije rastave razlomaka koji su i sami jedinični. Razlomak $\frac{1}{2}$ je jedinični, ali i on se može prikazati u obliku zbroja dvaju jediničnih razlomaka:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Mogućnost

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

nije prihvatljiva jer recipročni razlomci u prikazu moraju biti različiti.

Slično ovome, vrijedi

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}.$$

Zadatak 1. Napiši analogne formule za rastav razlomaka $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$.

Zadatak 2. Poopći formule iz prethodnog zadatka i napiši prikaz razlomka $\frac{1}{n}$ u obliku zbroja dvaju jediničnih.

Odgovori na ove zadatke su:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20},\quad \frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30},\quad \frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}.$$

Oni vode na sljedeću ispravnu formulu

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Zadatak 3. Odredi jedinični razlomak s najmanjim nazivnikom koji ima dva različita prikaza u obliku zbroja točno dvaju jediničnih razlomaka.

Zadatak 4. Odredi jedinični razlomak s najmanjim nazivnikom koji ima više od dva različita prikaza u obliku zbroja točno dvaju staroegipatskih razlomaka.

Evo odmah i odgovora na ove zadatke:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}&=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12},\\ \frac{1}{6}&=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\\ &=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}.\end{aligned}$$

Zadatak 5. Odredi sve različite prikaze razlomaka $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{12}$ u obliku zbroja dvaju jediničnih razlomaka.

Prvi razlomak može se prikazati na tri načina:

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}.$$

Drugi je pravi rekorder u broju različitih rastava:

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}&=\frac{1}{13}+\frac{1}{156}=\frac{1}{14}+\frac{1}{84}\\ &=\frac{1}{15}+\frac{1}{60}=\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\\ &=\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{21}+\frac{1}{28}.\end{aligned}$$

Zadatak 6. Odredi $n>12$ sa svojstvom da broj $\frac{1}{n}$ ima više različitih rastava od broja $\frac{1}{12}$.

U odgovoru na ovo pitanje zapitajte se što broj 12 čini posebnim u odnosu na brojeve prije njega.

Zadatak 7. Napiši četiri različita rastava za jedinični razlomak $\frac{1}{2n}$ u obliku zbroja dvaju jediničnih razlomaka. Ovdje je $n\geq 5$.

Ti su rastavi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}&=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n(2n+1)}\\ &=\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2n(n+1)}\\ &=\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{n(n+2)}\\ &=\frac{1}{3n}+\frac{1}{6n}.\end{aligned}$$

U svakom prikazu drugi je nazivnik veći od prvog. Sad treba provjeriti da su svi nazivnici u prvim pribrojnicima različiti. Za $n\geq 5$ vrijedi

$$2n+1<2(n+1)<2(n+2)<3n.$$

Za $n=3$ svi su ovi brojevi također različiti (pa $\frac{1}{6}$ ima četiri prikaza), ali za $n=4$ posljednja dva se podudaraju (pa $\frac{1}{8}$ ima tri različita prikaza).

Zadatak 8. Pronađi što više različitih prikaza za razlomak $\frac{1}{6n}$ u obliku zbroja dvaju jediničnih razlomaka.

Jednoznačnost prikaza

Razlomak $\frac{4}{5}$ ima prikaz

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

Međutim, vrijedi također

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10},$$

što pokazuje da prikaz pomoću staroegipatskih razlomaka nije jednoznačan.

Pokazat ćemo da taj prikaz nije jednoznačan niti za jedan razlomak. U tu je svrhu dovoljno primijetiti da vrijedi

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Sada se posljednji pribrojnik u prikazu uvijek može pomnožiti s ova tri razlomka:

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{28}\\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{28}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)\\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \frac{1}{168}.\end{aligned}$$

Postupak se može nastaviti unedogled:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \frac{1}{336} + \frac{1}{504} + \frac{1}{1008},$$

itd.

Budući da prikaz nije jednoznačan, možemo postaviti mnogo dodatnih pitanja, poput: Kako pronaći prikaz koji ima najmanji broj pribrojnika? Koji ima najmanje nazivnike? Koji prikaz ima nazivnike posebnih svojstava? itd.

Istraživanje staroegipatskih razlomaka aktualna je tema i u današnjem vremenu. Neki od najvećih matematičara dvadesetog stoljeća, poput Paula Erdösa dobar dio svojih znanstvenih istraživanja posvetili su problemima vezanim uz staroegipatske razlomke.

Zbrajanje staroegipatskih razlomaka

Staroegipatski se razlomci lako zbrajaju. Njihova je suma istog oblika ili pak sadrži član koji je oblika $\frac{2}{n}$. On je nastao kao zbroj dvaju identičnih jediniccnih razlomaka. Ako je ovdje n paran broj, tada ćemo kraćenjem opet dobiti jediniccni razlomak: $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Za neparni n može poslužiti formula:

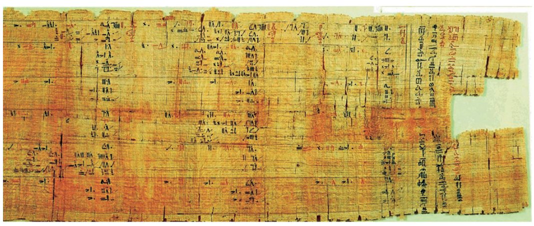
$$\frac{2}{2k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(2k-1)}.$$

Tako npr. vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6},\\ \frac{2}{5} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{15},\\ \frac{2}{7} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{28},\\ \frac{2}{9} &= \frac{1}{5} + \frac{1}{45}.\end{aligned}$$

Na Rhindovu papirusu nalazi se popis svih staroegipatskih razlomaka za $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{2}{101}$. Taj popis zauzima gotovo trećinu jedne njegove strane.

Rastavi imaju najviše četiri člana. Pritom su, tamo gdje je moguće pronaći više prikaza, birani oni prikazi kod kojih su nazivnici parni. Naime, takvi se razlomci jednostavnije zbrajaju i množe. Također, birani su prikazi kod kojih su nazivnici manji od 999. Više detalja o tome bit će napisano u sljedećem nastavku.



Nastavit će se...