Totalna zbrka

Sanja Sruk, Zagreb

Što je *totalna zbrka*?

Primjer. *Službenik treba poslati četiri različita pisma na četiri različite adrese. Na koliko načina on može poslati ta pisma tako da nijedno ne pošalje na pravu adresu?*

Ukupno postoji $4! = 24$ načina kako se 4 pisma mogu poslati na 4 adrese, ali među njima, dakako, ima onih gdje bar jedno pismo stiže na točnu adresu. Pogledajmo sve permutacije skupa $\{1, 2, 3, 4\}$:

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

Ako nam broj označava pismo, a pozicija adresu, tamnijom bojom su označene one mogućnosti u kojima niti jedno pismo nije poslano na točnu adresu, pa vidimo da ih ima devet. A što ako se radi o 7 pisama? $7! = 5040$ pa ova metoda nije nimalo praktična.

U kombinatorici se ovaj problem naziva ***totalna zbrka*** i predstavlja poseban slučaj problema koji se zove *le problème des rencontres* (problem sastanaka ili problem podudaranja). Postavio ga je francuski matematičar Pierre Rèmond de Montmort 1708., a riješio Nicolaus Bernoulli 1711. godine. Problem glasi: Koliko ima permutacija skupa od n elemenata koje imaju točno k fiksnih točaka?

Totalna zbrka je slučaj kad je $k = 0$ i matematička formulacija toga problema glasi: Koliko ima permutacija $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takvih da je $f(i) \neq i$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$?

Permutacija bez fiksne točke još se naziva **deranžman**. Mogli bismo reći da je deranžman razmještaj u kojem ništa nije na svom mjestu.

Formula uključivanja i isključivanja (FUI)

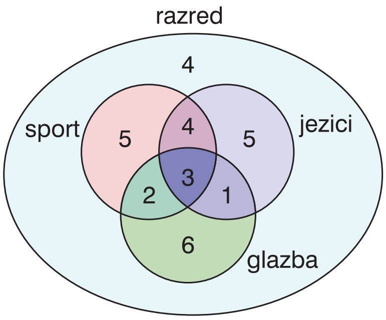
Za daljnja razmatranja ovog problema trebat će nam formula uključivanja i isključivanja. Nju možemo primijeniti u nekim zadatcima za srednju školu pa ostavimo na trenutak našeg službenika i njegova pisma i pogledajmo nekoliko primjera iz gimnazijskih udžbenika.

Zadatak 1. *U nekom razredu od 30 učenika 14 se bavi sportom, 13 uči neki strani jezik, 12 ide u glazbenu školu, 5 ide u glazbenu školu i bavi se sportom, 7 se bavi sportom i uči strani jezik, 4 ide u glazbenu školu i uči strani jezik, a troje se bavi svim*

Sanja Sruk, prof. mentor, 1. gimnazija, Zagreb, `sanja.sruk1@gmail.com`

navedenim aktivnostima. Koliko se učenika ne bavi niti jednom od tih aktivnosti?

U rješavanju ovoga zadatka pomoći će nam Vennov dijagram:



Upišemo li najprije broj učenika koji se bave svim trima aktivnostima pa dalje nadopunjavamo dijagram, vidjet ćemo da su ostala 4 učenika koji nisu uključeni ni u jednu aktivnost. U računanju se koristimo formulom za kardinalni broj elemenata unije. Ako imamo dva skupa, onda vrijedi:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Za tri skupa vrijedi:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

pa u našem slučaju broj učenika koji se bave nekom aktivnošću je $14+13+12-5-7-4+3 = 26$.

Matematičkom indukcijom može se pokazati da za n skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vrijedi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

S pomoću te formule i primjenom De Morganovih formula za komplemente skupova: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ i $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ dolazimo do formule uključivanja i isključivanja:

Neka je S konačan skup, a $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$, $\overline{A_i} = S \setminus A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada vrijedi:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \quad \text{(FUI)}$$

Sada zadatak možemo riješiti i primjenom ove formule: $|S| = 30$, $|A| = 14$, $|B| = 13$, $|C| = 12$, $|A \cap B| = 7$, $|B \cap C| = 4$, $|A \cap C| = 5$, $|A \cap B \cap C| = 3$. pa je

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 30 - (14 + 13 + 12) + (7 + 4 + 5) - 3 = 4.$$

Zadatak 2. *Koliko ima brojeva manjih od 1001 koji nisu djeljivi ni sa 2, ni sa 3, ni sa 5?*

Brojeva djeljivih s dva ima 500, s tri 333, s pet 200, s dva i tri 166, s dva i pet 100, s tri i pet 66, a onih koji su djeljivi sa sva tri broja ima 33. Imamo: $1000 - (500 + 333 + 200) + (166 + 100 + 66) - 33 = 266$.

Zadatak 3. *Koliko ima šesteroznamenkastih brojeva sa znamenkama 1, 2 i 3 u kojima se pojavljuju sve tri znamenke?* (Rješenje: 540.)

Koliko ima deranžmana

Vratimo se problemu deranžmana (permutacija bez fiksnih točaka). Broj deranžmana označava se sa D_n, a sljedeći teorem nam govori čemu je on jednak.

Teorem.

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

Dokaz: Ako sa S označimo skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, a sa A_i skup svih permutacija za koje je $f(i) = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, očito je $|S| = n!$, $|A_i| = (n-1)!$, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$, $\ldots$, $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = (n-n)! = 1$, tj. kardinalni broj skupa permutacija s fiksnom točkom i je $(n-1)!$ jer jedan element fiksiramo, a preostalih $n-1$ možemo rasporediti po volji; kardinalni broj skupa permutacija s fiksnim točkama i i j je $(n-2)!$

jer dva elementa fiksiramo, a ostale raspoređujemo po volji itd. Koliko ima skupova oblika A_i? Ima ih $\binom{n}{1}$ jer od n elemenata biramo jedan. Skupova oblika $A_i \cap A_j$ ima $\binom{n}{2}$ jer od n elemenata biramo dva (i i j) itd. Kako je broj deranžmana zapravo $D_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$, po formuli uključivanja i isključivanja imamo:

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \ldots \\ &\quad + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \end{aligned}$$

što se i tvrdilo u teoremu.

Primjenom teorema lako je izračunati broj deranžmana za male n, a za veće n možemo ga aproksimirati s pomoću Taylorova reda funkcije $f(x) = e^x$:

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Za $x = -1$ imamo

$$e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$$

pa je $D_n \approx n!e^{-1}$. Već za $n = 6$ pogreška je manja od 0.35 pa vrijedi da je D_n prirodni broj najbliži broju $n!e^{-1}$.

Vjerojatnost "totalne zbrke"

U našem primjeru sa službenikom i pismima mogli smo postaviti i ovo pitanje: *Kolika je vjerojatnost da nijedno pismo nije poslano na pravu adresu?* Svih permutacija ima 24, a deranžmana 9 pa je tražena vjerojatnost $\frac{9}{24} = 0.375$.

Primijetimo sada nešto zanimljivo i potpuno neočekivano. Vidjeli smo da je $D_n \approx n!e^{-1}$, tj. $\frac{D_n}{n!} \approx e^{-1} = 0.367879\ldots$, a to je upravo vjerojatnost da je neka permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ *totalna zbrka*. Ta vjerojatnost ne ovisi o n, ona je e^{-1} s točnošću na četiri decimale već za $n > 6$. Podatci za n od 2 do 10 nalaze se u tablici:

n	D_n	$n!$	$\frac{D_n}{n!}$
2	1	2	0.5
3	2	6	0.333333...
4	9	24	0.375
5	44	120	0.366666...
6	265	720	0.368055...
7	1854	5040	0.367857...
8	14 833	40 320	0.367881...
9	133 496	362 880	0.367879...
10	1 334 961	3 628 800	0.367879...

Kao što vidimo, iako izgleda nevjerojatno, šaljemo li 10, 100 ili 1000 pisama na isto toliko adresa, vjerojatnost da niti jedno nije poslano na pravu adresu ista je u svim slučajevima i iznosi $36.8\ \%$. Ipak ima malo reda i u totalnoj zbrci!

LITERATURA

1/ D. Veljan (1989.): *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb.

2/ S. Majstorović, K. Vincetić (2017.): *Totalna zbrka*, `https://hrcak.srce.hr/190875`