Staroegipatski razlomci,

3. dio

Neven Elezović, Zagreb

U trećem, posljednjem dijelu pod ovim naslovom, promatrat ćemo neke neriješene probleme povezane s prikazom razlomka u egipatskom obliku.

Cilj je ove rasprave ukazati na to da praktički ne postoji dio matematike koji je u potpunosti poznat i u kojem nije moguće i dalje znanstveno istraživati. Egipatski razlomci nastali su u ljudskoj civilizaciji u samom začetku matematičkog računa, a još i dan danas nude mnoštvo otvorenih i neriješenih problema.

Neke od ovih problema mogu i trebaju rješavati srednjoškolci zainteresirani za matematiku i/ili programiranje. To su zadatci otvorenog tipa za koje način rješavanja, a ponekad niti ishod, nije poznat.

Problem najkraćeg prikaza

Zadani razlomak $\frac{p}{q}$ *prikaži u obliku*

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k},$$

pri čemu je k *najmanji mogući.*

Drugim riječima, treba pronaći prikaz s najmanjim brojem pribrojnika.

Na kraju drugog dijela ovog članka napisani su najkraći mogući prikazi za neke razlomke s malim brojnicima i nazivnicima. Općeniti odgovor pa i algoritam za rješavanje ovog problema nisu poznati. Također, razlomci imaju uglavnom više različitih minimalnih prikaza. Broj takvih prikaza može se mjeriti stotinama i tisućama. Nije poznato kako se taj broj može odrediti za svaki konkretni razlomak.

Ovaj problem je koristan kao ozbiljna vježba programiranja koju mogu uspješno riješiti srednješkolci. Razlomak treba biti s dovoljno malim brojnikom i nazivnikom tako da čitav postupak (koji treba osmisliti svaki programer po svom nahođenju) bude rješiv u realnom vremenu i s resursima koji su dostupni praktički na svakom računalu.

Tablica 1 je zadatak i cilj. U njoj je zadan broj pribrojnika u minimalnom prikazu za razlomke sa

prof. dr. sc. Neven Elezović, Zavod za primijenjenu matematiku, Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, neven.elezovic@fer.hr

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–	2	–
3		2	2	–	3	2	–	2	2	–	3	2	–	2	2	–	3	2	–	2	2	–	2	2	–	2	2	–
4			3	–	2	–	2	–	2	–	3	–	2	–	3	–	2	–	2	–	2	–	3	–	2	–	3	–
5				2	3	2	2	–	3	2	3	2	–	2	3	2	2	–	2	3	3	2	–	2	2	2	2	–
6					3	–	–	–	2	–	3	–	–	–	2	–	3	–	–	–	2	–	2	–	–	–	2	–
7						3	3	2	3	2	2	–	3	3	3	2	3	2	–	3	3	2	3	2	2	–	3	2
8							3	–	4	–	3	–	2	–	4	–	3	–	2	–	2	–	3	–	3	–	3	–
9								3	4	–	3	2	–	2	2	–	4	2	–	3	3	–	3	2	–	2	3	–
10									4	–	3	–	–	–	3	–	2	–	2	–	3	–	–	–	2	–	2	–
11										3	3	3	3	3	3	2	3	2	2	–	3	2	3	3	3	2	3	2
12											4	–	–	–	3	–	3	–	–	–	2	–	4	–	–	–	4	–
13												4	3	3	3	3	3	3	3	2	3	2	2	–	3	3	3	2
14													3	–	4	–	4	–	–	–	3	–	3	–	2	–	4	–
15														4	4	–	4	–	–	3	4	–	–	2	–	2	2	–
16															5	–	3	–	3	–	4	–	3	–	3	–	3	–
17																3	4	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	2
18																	4	–	–	–	4	–	3	–	–	–	4	–
19																		3	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3
20																			4	–	4	–	–	–	4	–	4	–
21																				4	5	–	3	4	–	–	4	–
22																					5	–	4	–	4	–	3	–
23																						3	4	4	3	3	4	3
24																							4	–	–	–	4	–
25																								4	4	3	4	–
26																									4	–	4	–
27																										4	5	–
28																											5	–
29																												4

Tablica 1.

zadanim brojnikom i nazivnikom. Ono što se traži jest konkretan prikaz (barem jedan!) koji će imati ovdje predviđenu duljinu.

U tablici su dane duljine minimalnih prikaza za sve neskrative razlomke s brojnikom i nazivnikom ne većim od 30. U njoj vidimo da je razlomak s najmanjim nazivnikom koji zahtijeva tri pribrojnika $\frac{4}{5}$, prvi koji zahtijeva četiri pribrojnika je $\frac{8}{11}$, a prvi za koji treba pet pribrojnika je $\frac{16}{17}$.

Zadatak 1. *Napiši program s kojim ćeš moći dobiti najkraći prikaz za bilo koji razlomak iz priložene tablice.*

Zadatak 2. *Pronađi razlomak s najmanjim nazivnikom koji zahtijeva točno 6 pribrojnika.*

(Odgovor: To je razlomak $\frac{77}{79}$.)

Zadatak 3. *Pronađi razlomak s najmanjim nazivnikom koji zahtijeva točno 7 pribrojnika.*

(Odgovor: To je razlomak $\frac{732}{743}$.)

Na prvi pogled mogli bismo nastaviti s ispisivanjem sličnih zadataka u nedogled. Ali, ovaj posljednji već se nalazi na rubu današnjih znanstvenih istraživanja i sigurno premašuje mogućnosti mnogih iskusnih programera.

Na izvrsno uređenoj stranici [1], na kojoj se može naći i prethodno navedena tablica, mogu se pročitati dodatne informacije o ovom zadatku, između ostalog da razlomak $\frac{732}{743}$ posjeduje ni manje ni više već točno 2771 različitih minimalnih prikaza duljine 7. Poznat je i prvi razlomak koji zahtijeva 8 pribrojnika: $\frac{27\,538}{27\,539}$ i tu naše znanje prestaje.

Neriješeni problem 1. *Pronađi razlomak koji u svom egipatskom prikazu zahtijeva barem 9 pribrojnika.*

Razumno je pretpostaviti da će to biti ponovno razlomak oblika $\frac{p-1}{p}$ za neki prosti broj p, ali onda treba tražiti među prostim brojevima većim od $800\,400$ jer su svi manji već provjereni.

Sylvesterov niz

Fibonaccijev pohlepni algoritam objašnjen u prethodnom nastavku mnogi nazivaju Fibonacci-Sylvesterovim algoritmom jer je Sylvester u članku [2] ponovno aktualizirao proučavanje egipatskih razlomaka. U trenu kad ga je pisao, Sylvester nije bio svjestan rezultata iz Fibonaccijeve knjige. Sylvesterov je članak slobodno dostupan na internetu, pa je interesantno usporediti stil nekadašnjeg pisanja s današnjim.

Srž njegovog članka jest u proučavanju niza brojeva $a_1, a_2 \ldots$ koji služe u prikazu broja 1 s pomoću beskonačnog niza jediničnih razlomaka:

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \ldots \qquad (1)$$

Različitih prikaza ovakvog oblika ima beskonačno mnogo. Među svima njima ističe se Sylvesterov niz kod kojeg su brojevi $a_1, a_2 \ldots$ *najmanji mogući*. Evo kako dolazimo do tog niza.

Vrijedi

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

ali ovo nije egipatski prikaz, jer se pribrojnici ponavljaju. Zato ćemo drugi pribrojnik zamijeniti s *najvećim manjim jediničnim razlomkom*, pa dobivamo

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Ovaj je prikaz točan i rastav je završen. Da se to ne bi dogodilo, posljednji razlomak ponovno zamjenjujemo s prvim sljedećim jediničnim razlomkom:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \ldots$$

Razlika koja nedostaje je jedinični razlomak $\frac{1}{42}$. Njega ćemo zamijeniti s prvim sljedećim i nastaviti taj postupak u nedogled:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \frac{1}{3\,263\,443} + \ldots$$

Nazivnici u ovim razlomcima definiraju Sylvesterov niz (a_n).

Zadatak 4. *Dokaži da za Sylvesterov niz vrijedi*

$$a_1 = 2, \quad a_n = a_{n-1}(a_{n-1} - 1) + 1. \qquad (2)$$

Zadatak 5. *Dokaži i ovaj prikaz*

$$a_1 = 2, \quad a_n = 1 + a_1 a_2 \ldots a_{n-1}. \qquad (3)$$

Prvi zadatak nije pretežak, a drugi direktno slijedi iz prvog. Možda je korisno provjeriti da za ovako definiran niz uistinu vrijedi (1), a to je ekvivalentno rješenju prvog zadatka. Imajući u vidu način kako smo definirali Sylvesterov niz, potrebno je provjeriti da za zbroj S sljedećeg niza

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n - 1} \qquad (4)$$

vrijedi $S = 1$. Primijetite da je u posljednjem razlomku umjesto nazivnika a_n stavljen umanjeni nazivnik $a_n - 1$. Naime, za niz definiran s (2) vrijedi

$$\frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{a_{n-1}(a_{n-1} - 1)} = \frac{1}{a_{n-1} - 1} - \frac{1}{a_{n-1}}$$

i sada za zbroj razlomaka s desne strane u (4) imamo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n - 1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n-1} - 1} - \frac{1}{a_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1} - 1}. \end{aligned}$$

Dobili smo zbroj istog oblika, ali s jednim pribrojnikom manje. Nastavljajući postupak, sažimanje će se nastaviti sve dok ne preostane samo jedan član:

$$S = \frac{1}{a_1 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1.$$

Time je tvrdnja dokazana. Rješenje zadatka 4 prati isti postupak, ali u obrnutom smjeru.

Zadatak 6. *Dokaži da su svaka dva člana Sylvesterova niza relativno prosta.*

Tvrdnja slijedi iz prikaza 3.

Zgodno je napomenuti da odavde slijedi beskonačnost skupa prostih brojeva. Naime bilo koji prosti broj može dijeliti samo jedan među brojevima $a_1, a_2 \ldots$ jer su članovi tog niza međusobno relativno prosti. Budući da postoji beskonačno mnogo članova u ovom nizu, onda mora biti i beskonačno mnogo prostih brojeva.

Pohlepni algoritam za rastav razlomka može se dovesti u vezu s ovim algoritmom rastava broja 1 u beskonačan niz. Stoga nije neobično da je brzina rasta brojeva a_n analogna brzini rasta nazivnika u pohlepnom prikazu. Ta je brzina dvostruko eksponencijalna, može se dokazati da vrijedi

$$a_n \approx A^{2^{n+1}}.$$

Tu je A konstanta koja iznosi približno 1.2640847.

Harmonijski red

Zbroj jediničnih razlomaka harmonijskog niza je beskonačan:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty.$$

Tvrdnja se najlakše dokazuje grupiranjem članova niza zdesna u skupine koje imaju po 2^k članova, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$:

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \\ &\quad = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &\qquad + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots \end{aligned}$$

Zbroj pribrojnika u svakoj zagradi veći je od $\frac{1}{2}$ pa odatle slijedi tvrdnja.

To znači da ćemo računajući zbrojeve jediničnih razlomaka premašiti bilo koji zadani prirodni broj. S tim je u vezi ovaj poznati zadatak.

Zadatak 7. *Zbroj*

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

nije cijeli niti za jedan $n > 1$.

Dakle, parcijalne sume harmonijskog reda rastu neograničeno i pritom uporno preskaču prirodne brojeve!

Dokaz ovog zadatka nije jedostavan, a izvodi se najčešće analizom djeljivosti. Najlakše ga je načiniti ako se dokaže pomoćna tvrdnja:

Postoji prost broj p *koji dijeli samo jedan od brojeva* $2, 3 \ldots, n$.

Naime, tada se zbroj S može, nakon svođenja na zajednički nazivnik, napisati u obliku (uvjeri se u to!)

$$S = \frac{1 + kp}{n!}.$$

Brojnik nije djeljiv s p, a nazivnik jest pa ovaj razlomak nije cijeli broj.

Dokaz pomoćne tvrdnje slijedi iz poznatog rezultata Čebiševa: između svakog broja i njegovog dvostrukog postoji najmanje jedan prosti broj. Zato ćemo, krenuvši od broja n prema manjim brojevima, naići na prosti broj p koji ne može dijeliti nijedan prethodni prirodni broj.

Ovaj problem s harmonijskim redom povezan je s egipatskim prikazima. Riječ je o tome da se može

istraživati kako odabrati *podskup* skupa prirodnih brojeva tako da zbroj jediničnih razlomaka bude jednak nekom prirodnom broju.

To je uvijek moguće napraviti, za svaki prirodni broj i to na beskonačno mnogo načina. Može se, primjerice, pronaći prikaz kod kojeg prvi, najveći razlomak ima u nazivniku po volji velik prirodni broj!

Detaljnija analiza ovog problema premašuje okvire ovog članka, pa upućujem zainteresirane na izvore. Mogu krenuti od [1].

Za dodatne informacije o egipatskim razlomcima upućujem na članke [3] i [4] iz hrvatskih časopisa.

Erdös-Strausova hipoteza

Silvesterov članak je inicirao postavljanje problema koji spadaju u područje Diofantske analize, rješivosti jednadžbi u skupu cijelih brojeva. Najpoznatiji od tih problema, još uvijek neriješen, je sljedeći.

Neriješeni problem 2. (Erdös-Straus)
Svaki razlomak oblika $\frac{4}{n}$, $n \geq 4$ *može se napisati kao zbroj triju jediničnih razlomaka.*

Ovdje je dopušteno da jedinični razlomci budu jednaki.

Znamo li rješenje za prosti broj n, onda znamo i za svaki njegov višekratnik. Primjerice, iz

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

slijedi

$$\frac{4}{5k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{5k} + \frac{1}{10k}.$$

Zato je dovoljno razmotriti proste brojeve n. Do današnjeg dana, hipoteza je provjerena za sve proste brojeve do uključivo $51\,000\,000$-tog prostog broja (koji iznosi $1\,003\,162\,753$) i pokazala se istinitom. Međutim, dokaz da je ona istinita za svaki prosti broj n nije poznat, niti je poznat neki protuprimjer. Dokazano je da je hipoteza istinita za sve proste brojeve, osim možda za one koji pri dijeljenju s 840 daju ostatke 1, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2.

Za mnoge konkretne oblike broja n rastav je poznat, ali nisu pokriveni svi slučajevi, niti je izgledno da se eksplicitna formula može pronaći. Sljedeće dvije pokrivaju tek oko četvrtine slučajeva:

$$\frac{4}{12n+7} = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)(3n+2)} + \frac{1}{(12n+7)(3n+2)}$$

$$\frac{4}{24n+13} = \frac{1}{2(3n+2)} + \frac{1}{2(n+1)(24n+13)} + \frac{1}{2(n+1)(24n+13)(3n+2)}.$$

Dokazano je da se svaki razlomak oblika $\frac{3}{n}$ može napisati kao zbroj najviše triju jediničnih razlomaka. Što je s ostalim brojnicima?

Neriješeni problem 3. (Sierpinski, 1956.)
Svaki razlomak oblika $\frac{5}{n}$, $n \geq 3$ *može se napisati kao zbroj triju jediničnih razlomaka.*

Niti ova hipoteza nije dokazana. Provjerena je za sve n do $922\,321$.

Problemi ove vrste svrstavaju se u *aditivnu teoriju brojeva* i smatraju najtežim za rješavanje, usprkos jednostavnosti u zadavanju problema. Tipičan primjer je Goldbachova hipoteza: svaki se parni broj može prikazati kao zbroj dvaju prostih.

LITERATURA

1/ `http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html`
2/ J. J. Sylvester (1880.): On a Point in the Theory of Vulgar Fractions, *American Journal of Mathematics* Vol. 3, br. 4, 332–335.
3/ D. Jankov (2011.): Egipatski razlomci, *Osječki matematički list*, Vol. 11, br. 1, 11–18.
4/ P. Lončar (2015.): Egipatski razlomci, *Matematičko-fizički list*, Vol. LXV, br. 1, 8–16.