

Tko je prvi...

uočio da beskonačna suma može biti konačna?



Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Zasigurno ste u nekom trenu svog života čuli za Zenonove paradokse, paradokse koje je Aristotel pripisao starogrčkom filozofu **Zenonu iz Eleje**, koji je živio u 5. st. pr. Kr. Najpoznatiji među njima je paradoks o brzonogom Ahilu koji lovi sporu kornjaču: Ako Ahil trči za kornjačom, dok on dođe do mjesta odakle je ona krenula, kornjača je malo odmakla, dok Ahil dođe do te njezine pozicije, ona je opet malo odmakla i tako dalje – kaže Zenon: Ahil nikad neće uloviti kornjaču.

Razmotrimo taj paradoks iz moderne perspektive. Pretpostavimo da Ahil i kornjača trče po pravcu konstantnim brzinama i neka je Ahilova brzina $a > 1$ puta veća od brzine kornjače. Neka je $d > 0$ početna prednost kornjače. Da bi Ahil došao do početne pozicije kornjače treba mu neko vrijeme t , a kornjača je u tom istom vremenu prešla – jer je a puta sporija – udaljenost $\frac{d}{a}$. Za vrijeme koje Ahilu

treba da prijeđe taj razmak $\frac{d}{a}$, kornjača će odmaknuti za $\frac{d}{a^2}$. Nastavimo li tako, vidimo da Ahil prelazi niz udaljenosti koje su redom iznosa

$$d, \frac{d}{a}, \dots, \frac{d}{a^n}, \dots,$$

a kornjača prelazi niz udaljenosti

$$\frac{d}{a}, \frac{d}{a^2}, \dots, \frac{d}{a^n}, \dots$$

Ukupno će dakle Ahil prijeći udaljenost koja je beskonačna suma oblika

$$d + \frac{d}{a} + \dots + \frac{d}{a^n} + \dots = d \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n},$$

a kornjača će ukupno prijeći udaljenost

$$\frac{d}{a} + \dots + \frac{d}{a^n} + \dots = d \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n},$$

što je naravno točno za d kraće od Ahilova puta. Zenon u svom paradoksu pretpostavlja da su obje ove sume – ova dva geometrijska reda¹ – beskonačne, pa bi Ahilu trebalo beskonačno vremena da ulovi kornjaču, ali danas bismo iz konvergencije tih redova lako opovrgnuli Zenonovo razmišljanje. No, tko je prvi primijetio da takve beskonačne sume mogu dati konačan rezultat?

Stotinjak godina nakon Zenona **Eudoks iz Knida** (4. st. pr. Kr.) je utemeljio tzv. metodu ekshauštije. Ona se temelji na teoremu poznatom kao *Eudoksova lema*, sačuvanom u Euklidovim *Elementima*:

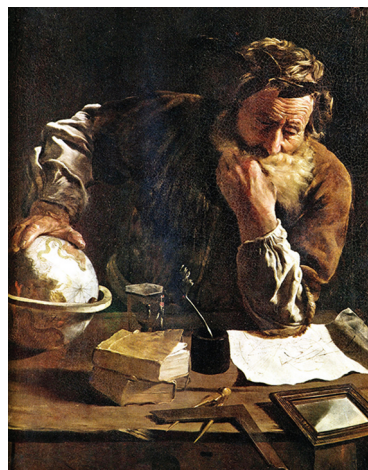
Ako su dane dvije različite istovrsne veličine² te ako od veće od njih oduzmemo bar njezinu polovinu, od dobivene razlike bar njezinu polovinu i ako se taj proces ponavlja, onda će u nekom trenu (nakon dovoljno ponavljanja) ostatak biti manji od manje od polaznih veličina.

Danas bismo Eudoksovu lemu zapisali formalno: Ako su zadani $a > b > 0$, onda postoji prirodan broj n takav da je

$$a - \sum_{i=1}^n \frac{a}{2^i} < b,$$

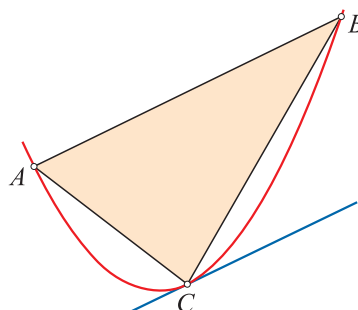
tj. vidimo da Eudoksova lema garantira konvergenciju geometrijskih redova kojima je kvocijent manji od $\frac{1}{2}$ (i po kriteriju uspoređivanja konvergenciju svih redova s pozitivnim članovima koji su redom manji od odgovarajućeg člana takvog geometrijskog reda). Ipak, Eudoks još zasigurno nije iskoristio svoju lemu za razmatranje beskonačnih suma, tj. redova, na naš način.

Još stotinjak godina kasnije **Arhimed iz Sirakuze** (3. st. pr. Kr., slika 1) usavršio je Eudoksovu metodu ekshauštije i iskoristio je za rješavanje niza zadataka koje bismo mi danas riješili integriranjem. Među njima ovdje ističemo Arhimedov dokaz da se segment parabole može kvadrirati ravnalom i šestarom. Mi ćemo uz korištenje moderne notacije pojednostavljeno opisati osnovne crte Arhimedova dokaza u kojem se, koliko je poznato, prvi put jasno pojavljuje konvergentan (geometrijski) red.



Slika 1. Arhimed kako ga je oko 1620. prikazao Domenico Fetti (slika je deklarirana kao *public domain*, (preuzeta s https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg)

Neka je dan segment parabole određen tetivom $\overline{AB}$ i neka je C točka parabole (očigledno između točaka A i B) u kojoj je tangenta paralelna s $\overline{AB}$ (slika 2). Arhimed je dokazao da je površina segmenta parabole točno jednaka $\frac{4}{3}$ površine trokuta ABC (iz čega slijedi da se segment parabole može kvadrirati jer je još prije Euklida bilo poznato kako bilo koji trokut ravnalom i šestarom pretvoriti u pravokutnik jednake površine, kako ravnalom i šestarom dobiti trećinu neke duljine pa stoga i konstruirati pravokutnik čija površina je $\frac{4}{3}$ površine trokuta, a i kako bilo koji pravokutnik ravnalom i šestarom pretvoriti



Slika 2. Arhimedova kvadratura segmenta parabole

¹ Podsjetimo, red je uređeni par niza (brojeva koje želimo sumirati u beskonačnost) i pripadnog niza parcijalnih suma (n -ta parcijalna suma niza je zbroj prvih n članova niza). Ako sumiramo geometrijski niz, govorimo o geometrijskom redu.

² Misli se na veličine pozitivnih iznosa koje imaju istu fizikalnu dimenziju – dva prirodna broja, dvije duljine, dvije površine ili dva volumena.

u kvadrat iste površine).

Kako je to Arhimed pokazao? Uočio je da dužine $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ generiraju nove odsječke parabole pa je u njih upisao nove trokute kojima je treći vrh u točki u kojoj je tangenta paralelna s odgovarajućom tetivom. Tako se dobiju četiri nova manja segmenta parabole u koje se po istom principu upišu trokuti i tako u beskonačnost.

Zatim je Arhimed pokazao da u prvom koraku (kad upisujemo trokute u segmente parabole određene tetivama $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$) vrijedi da je površina P trokuta ABC točno 4 puta veća od zbroja površina novih dvaju trokuta. Stoga analogno vrijedi za svaki korak (odnosno u svakom koraku dobivamo trokute ukupno 4 puta manje površine nego u prethodnom), dakle niz ukupnih površina trokuta iz pojedinog koraka je geometrijski niz s kvocijentom $\frac{1}{4}$ i početnim članom P .

Naposlijetku, koristeći Eudoksovu metodu ekshauštije Arhimed argumentira da je površina segmenta jednaka zbroju površina svih tih trokuta i da je to točno $\frac{4}{3}D$, odnosno Arhimed je zapravo dokazao da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}.$$

Ipak, do modernog pogleda na redove proći će još puno stoljeća (redovi se redovno razmatraju tek od 17. stoljeća, kad su ih koristili J. Gregory, N. Mercator, I. Newton, G. W. Leibniz), no ni oni još nisu jasno razumjeli pitanje konvergencije reda. Ono je u potpunosti razriješeno tek u 19. stoljeću kad

je jasno definiran pojam limesa (A. L. Cauchy, B. Bolzano, K. Weierstraß).

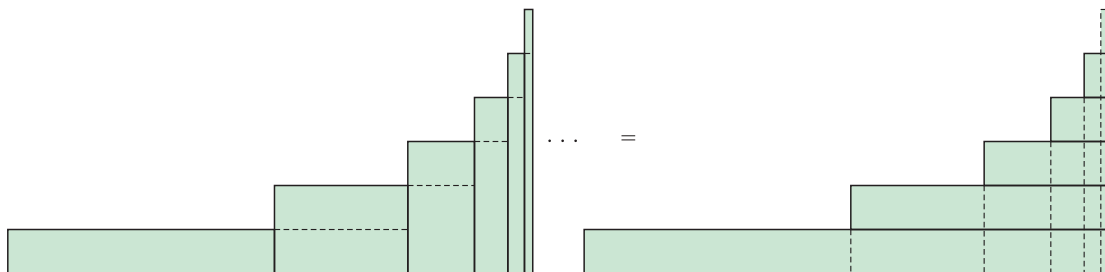
Prije kraja želimo spomenuti jednu iznimku (jer nakon antike se interes za ovakve teme na dugo vremena izgubio), a to je francuski biskup i znanstvenik **Nicole Oresme** (1323. – 1382.), koji je razmatrao bar dva reda – harmonijski red (zbroj recipročnih vrijednosti svih prirodnih brojeva), za koji je (na praktički isti način kako se danas dokazuje) dokazao divergenciju, tj. da mu je zbroj beskonačan te geometrijski argumentirao konvergenciju geometrijskih redova s kvocijentima $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$, a ujedno je dao i geometrijski argument (slika 3) da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

Ovo je prvi poznati prvi primjer konvergentnog reda koji nije geometrijski!

LITERATURA

- 1/ J. Babb (2005.): Mathematical Concepts and Proofs from Nicole Oresme: Using the History of Calculus to Teach Mathematics, *Science & Education* 14, str. 443–456.
- 2/ F. M. Brückler (2018.): *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*, Springer Spektrum.
- 3/ T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Volume II, Oxford at the Clarendon Press, 1921.
- 4/ Stanford Encyclopedia of Philosophy, <https://plato.stanford.edu/>, pristupljeno 7. rujna 2020.



Slika 3. Dokaz bez riječi – Oresmeov geometrijski argument konvergencije reda s općim članom $\frac{n}{2^n}$. Stepenice su sve iste visine 1, a širina svake sljedeće stepenice je upola manja od prethodne.