Jedna algebarska nejednakost i njezina primjena u geometriji

Šefket Arslanagić i
Daniela Zubović, Sarajevo, BiH

U ovom ćemo članku dokazati jednu algebarsku nejednakost i na primjerima pokazati kako se ona može primijeniti u geometriji.

Riječ je o sljedećoj nejednakosti:

$$x+y \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy},\ x, y>0. \qquad (1)$$

Dokaz: Imamo

$$\begin{aligned} & x+y \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy} \\ \Longleftrightarrow\ & x+y-\sqrt{xy} \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \quad /^2 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2+y^2+xy-2x\sqrt{xy}-2y\sqrt{xy}+2xy \\ & \geq \frac{x^2+y^2}{2} \quad /^2 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2+y^2+6xy-4(x+y)\sqrt{xy} \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (x+y-2\sqrt{xy})^2 \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (\sqrt{x}-\sqrt{y})^4 \geq 0, \end{aligned}$$

a ova nejednakost je točna, pa je točna i nejednakost (1).

U (1) vrijedi jednakost ako i samo ako je $x=y$.

Sada ćemo dati nekoliko primjera primjene nejednakosti (1) u geometriji.

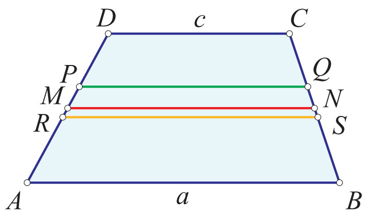
Primjer 1. Neka je četverokut $ABCD$ trapez s osnovicama a i c $(a \| c)$. Stavljajući u (1) da je $x=a$ i $y=c$, dobivamo nejednakost:

$$a+c \geq \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}+\sqrt{ac}.$$

prof. dr. sc. Šefket Arslanagić, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, `asefket@pmf.unsa.ba`
mr. sc. Daniela Zubović, Odsjek za matematiku, Prirodno-matematički fakultet Sveučilišta u Sarajevu, Bosna i Hercegovina, `dzubovic@pmf.unsa.ba`

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = c$, tj. ako je trapez paralelogram.

Gornja nejednakost ima poznatu geometrijsku interpretaciju (slika 1).



Slika 1.

Neka je nacrtani četverokut $ABCD$ trapez. Dužina $\overline{MN}$ je srednjica trapeza i vrijedi $|MN| = \dfrac{a+c}{2}$, dužina $\overline{PQ}$ dijeli trapez na dva slična dijela i vrijedi $|PQ| = \sqrt{ac}$, a dužina $\overline{RS}$ raspolavlja trapez na dva dijela jednakih površina i vrijedi $|RS| = \sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$.

Geometrijska interpretacija nejednakosti (1) svodi se na to da je srednjica trapeza bliža dužini koja mu raspolavlja površinu nego dužini koja ga dijeli na dva slična dijela.

Primjer 2. Neka je četverokut $ABCD$ romb čija je stranica a, a dijagonale d_1 i d_2.

Prema osnovnoj nejednakosti (1) dobivamo:

$$d_1 + d_2 \geq \sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2}{2}} + \sqrt{d_1 d_2},$$

a odavde zbog $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$:

$$d_1 + d_2 \geq a\sqrt{2} + \sqrt{d_1 d_2}. \qquad (2)$$

U (2) vrijedi jednakost ako i samo ako je $d_1 = d_2$, tj. ako je u pitanju kvadrat.

Primjer 3. Neka je trokut ABC pravokutni čije su katete a i b, a hipotenuza je c. Prema osnovnoj nejednakosti (1) imamo:

$$a + b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}$$

$$\iff a + b \geq \sqrt{\frac{c^2}{2}} + \sqrt{ab},$$

a odavde zbog činjenice da je površina ovog trokuta $P = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{ch}{2}$, gdje je h visina trokuta iz vrha pravog kuta C, dobivamo:

$$\iff a + b \geq \frac{c\sqrt{2}}{2} + \sqrt{ch}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$, tj. ako je u pitanju jednakokračni pravokutni trokut ($c = a\sqrt{2}$, $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$).

Primjer 4. U konveksnom četverokutu $ABCD$ ($\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90°$) točke E i F su projekcije vrhova A i C na dijagonalu $\overline{BD}$. Treba dokazati da vrijedi sljedeća nejednakost:

$$|AB| + |BC| + |CD| + |AD| \\ \geq \left(\sqrt{|AE|} + \sqrt{2|BD|} + \sqrt{|CF|}\right) \cdot \sqrt{|BD|}. \qquad (3)$$

Rješenje: Stavljajući u (1) da je $x = |AB|$, $y = |AD|$, odnosno $x = |BC|$, $y = |CD|$, zbog sličnosti trokuta $\triangle ABD \sim \triangle ABE$ i $\triangle BCD \sim \triangle BCF$ dobivamo:

$$\begin{aligned} |AB| + |AD| &\geq \sqrt{\frac{|AB|^2+|AD|^2}{2}} + \sqrt{|AB|\cdot|AD|} \\ &= \sqrt{\frac{|BD|^2}{2}} + \sqrt{|BD|\cdot|AE|} \\ &= \frac{|BD|}{\sqrt{2}} + \sqrt{|BD|\cdot|AE|}, \qquad (4) \\ |BC| + |CD| &\geq \sqrt{\frac{|BC|^2+|CD|^2}{2}} + \sqrt{|BC|\cdot|CD|} \\ &= \sqrt{\frac{|BD|^2}{2}} + \sqrt{|BD|\cdot|CF|} \\ &= \frac{|BD|}{\sqrt{2}} + \sqrt{|BD|\cdot|CF|}, \qquad (5) \end{aligned}$$

gdje je $AE \perp BD$, $CF \perp BD$ i $E, F \in BD$.

Zbrajajući sada nejednakosti (4) i (5), dobivamo:

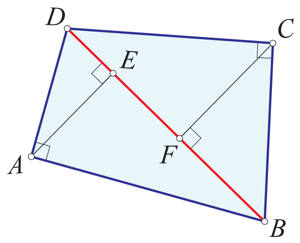
$$\begin{aligned}&|AB|+|AD|+|BC|+|CD|\\&\geq \frac{2|BD|}{\sqrt{2}}+\sqrt{|BD|}(\sqrt{|AE|}+\sqrt{|CF|}),\\&|AB|+|AD|+|BC|+|CD|\\&\geq \left(\sqrt{|AE|}+\sqrt{2|BD|}+\sqrt{|CF|}\right)\cdot\sqrt{|BD|},\end{aligned}$$

a ovo je nejednakost (3), što je i trebalo dokazati.

Jednakost u (3) vrijedi ako i samo ako je četverokut $ABCD$ kvadrat.

Ponudit ćemo i geometrijsku interpretaciju nejednakosti (3).

Neka je nacrtan četverokut $ABCD$ tako da je $AE \perp BD$, $CF \perp BD$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCD = 90°$ (slika 2).



Slika 2.

Kako je

$$P_{\triangle ABD}=\frac{|AE|\cdot|BD|}{2}=\frac{|AB|\cdot|AD|}{2},$$

kao i

$$P_{\triangle CBD}=\frac{|CF|\cdot|BD|}{2}=\frac{|BC|\cdot|CD|}{2},$$

sada iz (3) dobivamo:

$$o_{ABCD}\geq\sqrt{2P_{\triangle ABD}}+\sqrt{2P_{\triangle BCD}}+\sqrt{2}|BD|,$$

gdje je o_{ABCD} opseg četverokuta $ABCD$.

LITERATURA

1/ Š. Arslanagić (2005.): *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo.

2/ D. Palman (1999.): *Planimetrija*, Element, Zagreb.

3/ J. Pečarić (1996.): *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Mala matematička biblioteka 6, Element, Zagreb.