

Tko je prvi... uveo nulu?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Danas je teško zamisliti ikakvu matematiku, pa čak i najobičniju računicu, bez nule. No, većina je današnje školske matematike razvijena, odnosno otkrivena je prije nego su ljudi počeli koristiti nulu. Štoviše, uvođenje nule ima dva aspekta – nula kao broj i nula kao znamenka. Nipošto ne treba misliti da jedno automatski podrazumijeva i drugo, a tome najviše svjedoči povijest nule.

Stari narodi, prije nekih 5000 godina (Egipćani, Sumerani, Babilonci, Asirci) počeli su uvoditi brojeve, odnosno simbole za brojeve. No, ideja nule tad nije postojala ni “u poveljama”. Da se stvarno radi o problemu, svjedoči najnapredniji od starih brojevnih sustava, babilonski sustav (razvijen u doba treće urske dinastije, potkraj 3. tisućljeća pr. Kr.) s primarnom bazom 60 i sekundarnom bazom 10. Iako je to bio prvi pozicijski brojevni sustav u povijesti i time bitno upotrebljiviji u ozbiljnijim računima od drugih tadašnjih brojevnih sustava (a njegovo nasljeđe vidimo i danas kad vrijeme opisujemo satima, minutama i sekundama, odnosno mjeru kuta u stupnjevima, minutama i sekundama), taj brojevni sustav nije imao znamenku 0. To znači da se razlika među brojevima predstavljenim, primjerice, brojkama 12, 102, 1200, 1020,...¹ mogla shvatiti samo iz konteksta. No, u to doba brojevi još nisu bili samostalni objekti, već više nešto poput pridjeva, pa Babiloncima to vjerojatno nije bio toliko problem. Tek u doba Seleukovića,² 4. st. pr. Kr., taj je sustav dorađen simbolom za znamenku nula, ali samo ako se radilo o izostanku srednjih potencija broja 60, ne i onih na kraju (to znači da se moglo razlikovati 102 od 12, ali ne i od 1200).

S pojavom prvog glasovnog pisma – feničkog alfa-beta, mnoga kasnija pisma preuzimaju feničku ulogu i svojim glasovnim simbolima pridaju brojčane vrijednosti (npr. grčki alfabet, ćirilica, glagoljica itd.) Ipak, nakon toga dolazi do dugog razdoblja u kojem se nula ne pojavljuje. Simbola za nulu nije bilo

u starogrčkom akrofonskom sustavu (čiju logiku slijede i svima poznate rimske brojke), a nije ga bilo niti u starogrčkom alfabetskom sustavu. U doba vrhunca starogrčke matematike korišten je upravo alfabetski sustav koji je funkcionirao bez simbola za nulu, što svjedoči o tome da se o nuli kao broju nije niti razmišljalo.³

Pokušamo li u bilo kojem od tih starih sustava računati bilo što kompliciranije od zbrajanja, oduzimanja i udvostručavanja, brzo ćemo se naći u problemima. Usprkos tome što babilonski sustav nije bio apsolutno pozicijski zbog nedostatka znamenke nula, bio je superioran u bilo kojim ozbiljnim znanstvenim proračunima, te se (uz korištenje



Slika 1. Prikaz Klaudija Ptolemeja
(izvor: Wikipedija, slika deklarirana kao *public domain*)

doc. dr. sc. Franka Miriam Brueckler, Zavod za matematičku analizu, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, bruckler@math.hr

¹ Koristimo moderne, a ne babilonske simbole za znamenke 1 i 2. Također, ovdje ne ulazimo u to da se radi o brojevima zapisanim u seksagezimalnom sustavu.

² Seleukovići su vladali velikim dijelom azijskog carstva Aleksandra Velikog, u razdoblju 305. – 64. g. pr. Kr.

³ Napomenimo ovdje da su antički Grci prvi koji su brojeve smatrali samostalnim objektima, ali se pod brojevima u klasično doba podrazumijevaju isključivo prirodni brojevi.

simbola alfabetskog sustava) zadržao i u antičkoj Grčkoj u astronomskim računima. Tako je primjerice i znameniti **Klaudije Ptolemej** (oko 1. – 2. st., slika 1) koristio simbol za znamenku nula “usred” brojke, ali i na njenom kraju. Nažalost, malo je njegovih suvremenika prihvatilo tu ideju, a uslijed nesklonosti rimske vlasti prema znanosti i kasnijem potpunom diskontinuitetu s klasičnom grčkom znanosti uslijed provala Barbara, Ptolemejevo korištenje znamenke nula nije ostavilo dubljeg traga.

Iako je današnja matematika postavljena na temeljima deduktivne logike antičkih Grka, što se tiče nule – i mnogočega drugog iz “praktične” matematike – bitniji je utjecaj Europljanima egzotične indijske kulture. Tijekom prvog tisućljeća pr. Kr. na području Indije iz starijih dekadskih sustava razvile su se brahmanske brojke. Radilo se o pozicijskom dekadskom sustavu bez simbola za nulu. S vremenom su indijski pisci uočili prednost pozicijskog sustava, odnosno označavanja “nedostajuće” potencije. Isprva se za nju koristila riječ značenja “prazno” (*shunya*).

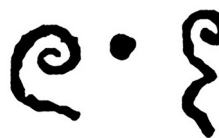
Malo-pomalo se ideja te “praznine” razvila u ideju broja nula. Iako su do iste ideje mogli u to doba, u prvom tisućljeću nove ere, doći i Europljani (primjerice, koristeći abakus koristili su prazne stupce za nedostajuće potencije broja 10 i *de facto* imali ono što su imali i Indijci), iz nepoznatih se razloga ta ideja kristalizirala u Indiji.

Sredinom 5. st. nula kao broj definitivno je postala pojam u indijskoj matematici. Tome svjedoči jedan od najvećih staroindijskih matematičara **Brahmagupta** (oko 598. – 668.), koji je prvi u povijesti opisao pravila računanja s nulom:

“Dug umanjen za *shunya* je dug. Imanje umanjeno za *shunya* je imanje. *Shunya* umanjena za *shunya* je *shunya*. Dug oduzet od *shunya* je imanje. Imanje oduzeto od *shunya* je dug. ...”⁴

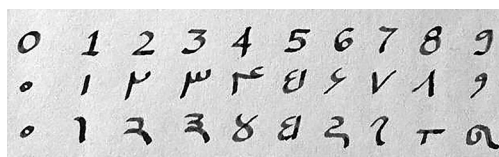
Dao je i (korektna) pravila za množenje s nulom i (nekorektna) za dijeljenje s nulom. Štoviše, Brahmagupta je istakao da oduzimanjem broja od sebe dobivamo nulu – ovo je vjerojatno prva definicija nule u povijesti.

Praktični su Indijci paralelno s ovim osvještavanjem ideje broja nula, dalje razvijali tehnike računa. To je



Slika 2. Kmerska brojka 605 kao na hramu u Samboru (izvornik: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Khmer_Numerals_-_605_from_the_Sambor_inscriptions.jpg, autor: Paxse, licenca CC BY-SA 3.0)

naposljetku dovelo do zamjene riječi *shunya* simbolom za znamenku nula, kružićem. Kad se to točno dogodilo, ne znamo, ali najkasnije je to bilo u 9. st. Naime, kmerski natpis u hramu u Samboru (današnja Kambodža) sadrži jasan zapis broja 605 sa simbolom za 0 (i kmerskim simbolima za 6 i 5). Ubrzo zatim stariji, na brahmanskim brojkama zasnovani, indijski dekadski pozicijski brojevni sustavi prošireni su znamenkom nula (nagari znamenke, slika 3), a tu su ideju od njih par stoljeća kasnije preuzeli Arapi. U arapskom svijetu znamenke su izmijenile oblik, ali zadržale istu logiku, te se razvile u dva tipa. Istočni se i danas koristi u nekim zemljama Bliskog istoka. Zapadni je u kasnom srednjem vijeku kontaktom s Europljanima preoblikovan u danas svima nama prepoznatljiv sustav temeljen na znamenkama 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. S druge strane, do prihvaćanja nule kao broja prošlo je još više vremena i tek negdje od 17. stoljeća ona postaje punopravni broj.



Slika 3. Usporedba suvremenih znamenaka indoarapskog dekadskog pozicijskog sustava (prvi red), ranih arapskih znamenaka (srednji red) i indijskih nagari-znamenaka (donji red). Slika je © FMB2017.

LITERATURA

- 1/ A. Bellos (2011.): *Alex's Adventures in Numberland*, Bloomsbury Publishing, London.
- 1/ D. Medić (2011.): *Povijest brojeva i njihove notacije*, Diplomski rad, PMF – Matematički odjel, Zagreb.
- 3/ MacTutor History of Mathematics Archives. “Zero”, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Zero/> (pristupljeno 5. 11. 2020.)

⁴ Uočimo da ovdje imamo i negativne brojeve (dugove), no njih su ranije uveli Kinezi.