

Algebra – izbor iz natjecateljskih zadataka

Patricija Dovijanić i
Nika Utrobičić, Zagreb



Podjela posla

Na svim razinama natjecanja u 6., 7. i 8. razredu često se pojavljuju zadatci s "podjelom posla" – radnici koji zajedno obavljaju neki posao, cijevi koje pune bazen, prijatelji koji prevode tekst i razne slične priče. U svim tim zadacima možemo primijeniti sličan pristup, a to je promatrati što svaki od "sudionika" u podjeli posla, bio to radnik, cijev ili nešto treće, napravi sam u jednoj jedinici vremena. Nakon toga jednostavno je sve povezati u cjelinu, kao u sljedećim zadacima:

Zadatak 1.

Tri cijevi pune bazen vodom. Ako ga pune samo prva i druga cijev, bazen se napuni za 20 minuta, ako ga pune druga i treća cijev, napuni se za 15 minuta, a ako ga pune prva i treća cijev, napuni se za 12 minuta. Za koliko se vremena napuni bazen ako ga pune sve tri cijevi zajedno?

Državno natjecanje 2006., 7. razred

Rješenje: Prisjetimo se glavne ideje: bitno je odrediti što bi se dogodilo u jedinici vremena za svaku pojedinu cijev kada bi bazen napunila sama.

Označimo sa x , y i z broj minuta koji bi trebao ređom prvoj, drugoj i trećoj cijevi da same napune bazen. Odatle zaključujemo da bi prva cijev, kada bi punila bazen sama, u jednoj minuti napunila $\frac{1}{x}$ cijelog bazena. To vrijedi zbog toga što množenjem broja minuta s udjelom obavljenog posla po minuti $\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)$, dobijemo 1, tj. cijeli bazen – cijeli posao obavljen. Slično zaključujemo da druga cijev u jednoj minuti napuni $\frac{1}{y}$, a treća $\frac{1}{z}$ bazena. To je uvijek istina bez obzira na to pune li one bazen same, s još jednom cijevi, ili s još dvije – unutar jedne minute, svaka od njih uvijek doprinosi istim volumenom vode.

Ako bazen pune prva i druga cijev, znamo da se on napuni za 20 minuta. Ponovno promatramo što se dogodi unutar jedne jedinice vremena, što u ovom zadatku znači unutar jedne minute: ako se cijeli bazen napuni za 20 minuta, u jednoj minuti napuni se $\frac{1}{20}$ bazena. Znamo da u jednoj minuti prva cijev

napuni $\frac{1}{x}$, a druga $\frac{1}{y}$ bazena, a kad pune zajedno, njihovi se doprinosi zbrajaju. Sada ovaj uvjet zadatka možemo zapisati kao jednadžbu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$, jer u jednoj minuti prva i druga cijev zajedno napune $\frac{1}{20}$ bazena. Na sličan način zapišemo i preostala dva uvjeta: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}$ i $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$.

Moramo odrediti za koliko se vremena napuni bazen ako ga pune sve tri cijevi zajedno. Ponovno to svedimo na ono što se dogodi u jednoj minuti: ako sve tri cijevi pune zajedno, u jednoj minuti napunit će $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}$ bazena. Ovdje je n broj minuta koji je potreban da sve tri cijevi zajedno napune bazen i to je ono što tražimo.

Rješenje dobijemo iz sustava, no kako su nam nepoznanice u nazivniku, na što nismo navikli, bit ćemo malo kreativniji u rješavanju. Zbrajanjem jednadžbi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12},$$

dobivamo

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{1}{5}.$$

Dijeljenjem s 2 imamo $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$. Dakle, $n = 10$; sve tri cijevi zajedno napunit će bazen za 10 minuta.

Zadatak 2.

Dva radnika postavljaju parkete. Kada bi radio sam, prvi bi radnik posao završio za 4 dana. Zajedno bi posao završili za 3 dana. Međutim, nakon što su dva dana radili zajedno, prvi se radnik razbolio pa je drugi posao završio sam. Koliko je dana trajalo postavljanje parketa?

Županijsko natjecanje 2014., 6. razred

Rješenje: Ponovno promatramo što svaki od radnika sam napravi u jednoj jedinici vremena – u jednome danu. Slično kao u prethodnom primjeru, prvi radnik u jednome danu odradi $\frac{1}{4}$ posla. Ne znamo koliko bi dana trebalo drugom radniku kad bi radio sam, tj. koliko posla drugi radnik dnevno obavi sam, ali znamo da prvi i drugi radnik zajedno dnevno odrade $\frac{1}{3}$ posla. Sada jednostavno dobijemo koliko posla u danu obavi drugi radnik tako da od onoga što obave zajedno oduzmemo ono što obavi prvi radnik: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Dakle, u jednome danu drugi radnik sam obavi $\frac{1}{12}$ posla.

Ono što je drukčije u ovom zadatku u odnosu na prošli jest promjena situacije usred obavljanja posla – kada se prvi radnik razboli, drugi nastavlja sam. To je često u ovom tipu zadataka, pa treba uvijek obratiti pažnju na to i pozorno čitati tekst zadatka.

U prva dva dana dvojica radnika zajedno su odradila $\frac{2}{3}$ posla, što znači da im je preostalo $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ posla za obaviti. Tu $\frac{1}{3}$ posla obaviti će drugi radnik sam, i to tako da svaki dan odradi $\frac{1}{12}$ posla. Zanima nas koliko dana mu za to treba, što jednostavno doznamo tako da postavimo jednadžbu gdje tražimo broj dana d : $\frac{1}{12} \cdot d = \frac{1}{3}$, pa je $d = 4$. Dakle, drugom radniku trebat će još 4 dana da sam dovrši posao.

Ne zaboravimo na ona dva dana zajedničkog rada! Postavljanje parketa trajalo je 6 dana.

Zadatci za vježbu

- Hotel ima tri bazena A , B i C koji se mogu ventilima spojiti ili odvojiti. Za punjenje se koristi nekoliko jednakih cijevi. Kada su spojena sva tri bazena, njihovo punjenje vodom iz triju cijevi traje 18 minuta. Ako se spoje samo bazeni A i B , njihovo punjenje s pomoću dviju cijevi traje 21 minutu, a ako se spoje samo bazeni B i C , punjenje s pomoću dviju cijevi traje 14 minuta. Koliko sekundi traje punjenje

bazena **B** s pomoću jedne cijevi? (Rješenje: 960 sekundi.)

HMOK 2020., 1. kolo, 4. razred

2. Tri 3D pisača izrade zadani model koji se može složiti iz više dijelova. Ako bi istovremeno printali prvi i drugi pisač, trebalo bi im ukupno 30 minuta za dovršiti cijeli model. Ako bi istovremeno printali prvi i treći pisač, trebalo bi im 40 minuta za dovršavanje cijelog modela. Drugom i trećem pisaču za istovremenu izradu cijelog modela trebale bi 24 minute. Koliko bi vremena trebalo svakom od pisača kako bi dovršio cijeli zadani model? (Rješenje: prvom pisaču trebalo bi 120, drugom 40, a trećem 60 minuta.)

Državno natjecanje 2019., 6. razred

3. Janica i Jelica za prijevod određenog broja stranica teksta trebaju 30 sati, Janica i Jurica trebaju 42 sata, a Jelica i Jurica će prijevod završiti za 35 sati. Koliko bi im vremena (sati i minuta) trebalo za taj prijevod kada bi radili svi troje zajedno? (Rješenje: 23 sata i 20 minuta.)

Školsko natjecanje 2012., 7. razred

4. Bojenje zidova u novoj zgradi 10 bi radnika završilo za 15 dana. Međutim, na početku je bilo samo 6 radnika, a nakon 5 dana došla su još dva radnika te poslije još 3 dana još 4 radnika. Za koliko je dana posao napokon završen? (Rješenje: za 16 dana.)

Županijsko natjecanje 2013., 7. razred

5. Da bi pokosili livadu pored očeve kuće, Dinku i Hinku treba 36 minuta, Hinku i Vinku 45 minuta, a Vinku i Dinku sat vremena. Dogovorili su se da će svaki od njih pokositi točno trećinu livade. Koliko će vremena raditi Hinko, koliko Dinko, a koliko Vinko? (Rješenje: Hinku će trebati 20, Dinku 30, a Vinku 60 minuta.)

Županijsko natjecanje 2020., 7. razred

6. Janko i Matko, radeći zajedno, zadani posao mogu dovršiti za 36 minuta. Radi li Janko sam, on treba 30 minuta više nego kad Matko radi sam. Koliko bi trebalo Janku da sam obavi taj posao? (Rješenje: 90 minuta.)

Županijsko natjecanje 2011., 8. razred

Nejednakosti među sredinama

Još jedna važna natjecateljska tema iz područja algebre su nejednakosti. Nejednakosti su područje koje je u velikoj mjeri zastupljeno na srednjoškolskim matematičkim natjecanjima i u mnogim je zadacima korisno prepoznati takozvane nejednakosti među sredinama. U ovom ćemo se članku najprije upoznati s nejednakostima među sredinama koje navodimo bez dokaza, a inače se mogu dokazati na jako puno načina [1]. Zatim ćemo pokazati kako se one koriste u nekim zadacima s natjecanja.

Neka je n prirodan broj veći od 1 te neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ **pozitivni** realni brojevi. Tada je njihova:

- harmonijska sredina

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

- geometrijska sredina

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

- aritmetička sredina

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- kvadratna sredina

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Za ovako definirane sredine vrijedi

$$K \geq A \geq G \geq H,$$

i upravo to su nejednakosti među sredinama koje će nam koristiti u zadacima. Jednakosti se postižu ako i samo ako vrijedi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Najčešće se koristi $A \geq G$ nejednakost.

Napomena:

$$K \geq A \geq G$$

vrijedi i za nenegativne $x_1, x_2, \dots, x_n$, a

$$K \geq A$$

vrijedi za sve realne brojeve, neovisno o njihovu predznaku.

Pogledajmo upotrebu navedenih nejednakosti u sljedećim primjerima.

Zadatak 1.

Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Rješenje: Zadatak rješavamo primjenom A-G nejednakosti na svaki od faktora. Po A-G nejednakosti vrijedi:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

Množenjem svake nejednadžbe s 2 dobivamo:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, b+c \geq 2\sqrt{bc}, c+a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Zbog toga vrijedi:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc,$$

što je trebalo dokazati.

Zadatak 2.

Dokaži da za pozitivne realne a, b, c vrijedi:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Nesbittova nejednakost

Rješenje: Ova nejednakost ima puno različitih dokaza, a mi ćemo je dokazati primjenom A-H nejednakosti. Primijetimo da ako svakom od razlomaka s lijeve strane dodamo jedan, dobivamo razlomke s istim brojnikom. U natjecateljskim je zadacima često korisno "namjestiti" iste brojnike.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \geq \frac{3}{2} + 3$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

$\Leftrightarrow$

$$2(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9.$$

Primijenimo li A-H nejednakost na

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b},$$

dobivamo

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}}{3} \\ & \geq \frac{3}{(b+c) + (c+a) + (a+b)} \end{aligned}$$

tj.

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Zato je

$$\begin{aligned} & 2(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \\ & \geq 2(a+b+c) \cdot \frac{9}{2(a+b+c)} \\ & = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Zadatak 3.

Neka su x, y i z pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $xyz = 1$. Dokaži nejednakost

$$\begin{aligned} & \frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \\ & \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \end{aligned}$$

Državno natjecanje 2016., 3. razred, A varijanta

Rješenje: U ovom ćemo zadatku primijeniti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine na recipročne izraze, što je česta ideja. Lijevu stranu nejednakosti možemo zapisati kao

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right).$$

Primijenimo A-G nejednakost na $\frac{1}{x^3}, \frac{1}{y^3}, \frac{1}{z^3}$:

$$\frac{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x^3 y^3 z^3}} = \frac{1}{xyz} = 1.$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} &= \\ x^3 + y^3 + z^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} &+ \underbrace{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}}_{\text{A-G}} \geq \\ x^3 + y^3 + z^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + 3 &= \\ \left(x^3 + \frac{1}{y^3} + 1\right) + \left(y^3 + \frac{1}{z^3} + 1\right) + \left(z^3 + \frac{1}{x^3} + 1\right). \end{aligned}$$

Pribrojnik na desnoj strani grupiramo tako da povežemo varijable koje su povezane i na desnoj strani originalne nejednakosti te na svaki od pribrojnika primijenimo A-G nejednakost. Primjenom A-G nejednakosti na prvi pribrojanik imamo

$$\frac{x^3 + \frac{1}{y^3} + 1}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3}} = \frac{x}{y}.$$

Primjenom na sva tri pribrojnika, dobivamo

$$\begin{aligned} \left(x^3 + \frac{1}{y^3} + 1\right) + \left(y^3 + \frac{1}{z^3} + 1\right) + \left(z^3 + \frac{1}{x^3} + 1\right) &\geq \\ 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3}} &= 3 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \end{aligned}$$

pa vrijedi

$$\frac{x^6+2}{x^3} + \frac{y^6+2}{y^3} + \frac{z^6+2}{z^3} \geq 3 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)$$

što je trebalo dokazati.

Zadatak 4.

Ako su x, y, z i w realni brojevi takvi da vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + 3y + 5z + 7w = 4,$$

odredite najveću moguću vrijednost izraza $x + y + z + w$.

Državno natjecanje 2017., 2. razred, A varijanta

Rješenje: U ovom ćemo zadatku demonstrirati primjenu nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine. Kako želimo pronaći najveću moguću vrijednost $x + y + z + w$, bilo bi korisno dobiti neku

nejednakost oblika $x + y + z + w \leq K$ gdje je K neka konstanta pa dokazati da se postiže jednakost.

Uočimo prvo da uvjet možemo zapisati kao zbroj kvadrata:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + x + 3y + 5z + 7w = 4$$

$\iff$

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} &+ y^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \\ + z^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot z + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} &+ w^2 + 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot w + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} = 4 \end{aligned}$$

$\iff$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 &+ \left(w + \frac{7}{2}\right)^2 = 25. \end{aligned}$$

Ovako zapisan uvjet podsjeća nas na kvadratnu sredinu brojeva $x + \frac{1}{2}$, $y + \frac{3}{2}$, $z + \frac{5}{2}$ i $w + \frac{7}{2}$. Primijenimo na njih A-K nejednakost:

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{1}{2} + y + \frac{3}{2} + z + \frac{5}{2} + w + \frac{7}{2}}{4} &\leq \\ \leq \sqrt{\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(w + \frac{7}{2}\right)^2}{4}}. \end{aligned}$$

Primijenimo uvjet i dobijemo

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{1}{2} + y + \frac{3}{2} + z + \frac{5}{2} + w + \frac{7}{2}}{4} &\leq \frac{5}{2} \\ \iff x + y + z + w &\leq 2. \end{aligned}$$

Sada znamo da je $x + y + z + w$ najviše 2. Preostaje pokazati da se vrijednost 2 zaista postiže. Sjetimo se uvjeta jednakosti za A-K nejednakost. Mora vrijediti

$$x + \frac{1}{2} = y + \frac{3}{2} = z + \frac{5}{2} = w + \frac{7}{2} \geq 0.$$

Taj uvjet iskoristimo da pronađemo neke x, y, z, w koji zadovoljavaju početni uvjet, a za koje se postiže

maksimum. To su, primjerice, $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$, $w = -1$ (u ovom zadatku, oni su i jedinstveni jer još i zbroj njihovih kvadrata mora biti 25).

Zadaci za vježbu

1. Dokaži da za sve $x, y > 0$ vrijedi nejednakost

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

Županijsko natjecanje 2009., 1. razred, A varijanta

2. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1,$$

dokaži nejednakost

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

Županijsko natjecanje 2005., 1. razred

3. Neka su O i P redom opseg i površina pravokutnika. Dokaži da vrijedi

$$O \geq \frac{24P}{O+P+1}.$$

Županijsko natjecanje 2010., 2. razred, A varijanta

4. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a + b + c = abc$. Dokaži da vrijedi

$$a^5(bc-1) + b^5(ca-1) + c^5(ab-1) \geq 54\sqrt{3}.$$

Županijsko natjecanje 2011., 3. razred, A varijanta

5. Dokaži da za nenegativne realne brojeve a i b takve da je $a + b \leq 2$ vrijedi

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}.$$

Kada se postiže jednakost?

Županijsko natjecanje 2019., 2. razred, A varijanta

6. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c \geq 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}.$$

Državno natjecanje 2015., 3. razred, A varijanta

7. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leq 4.$$

Državno natjecanje 2015., 1. razred, A varijanta

8. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Državno natjecanje 2015., 2. razred, A varijanta

9. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokaži da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Državno natjecanje 2014., 3. razred, A varijanta

LITERATURA

1/ Marijana Pinkl (2013.): *Osnovne sredine*, diplomski rad, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayer, Osijek.

2/ <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm>

3/ <https://natjecanja.math.hr/hmok2020/>